Métriques continues pour l'adaptation de maillages tridimensionnels

Adrien LOSEILLE, INRIA - Gamma
Frédéric ALAUZET, INRIA - Gamma
Alain DERVIEUX, INRIA - tropics

Mots-clés : Métriques continues, adaptation de maillage, maillage anisotrope, ordre de convergence, mécaniques des fluides, équations d'Euler

Lors de la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles, l'efficacité et la précision sont étroitement liées au maillage de calcul utilisé. Ainsi, l'adaptation de maillages non structurés permet de diminuer le temps CPU, en réduisant le nombre de degrés de liberté, mais également de capturer de manière automatique l'anisotropie des phénomèmes physiques étudiés.
Dès lors, il semble nécessaire de considérer le maillage comme une inconnue du problème [1, 2]. Pour contourner l'impossibilité de déterminer des classes d'équivalence de maillages non iso-topologiques, ainsi que la difficulté de trouver une structure algébrique hilbertienne naturelle, le concept analytique de métriques continues est introduit [1]. Ce dernier associe à tout point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ du domaine de calcul Ω des directions d'étirement $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}), \mathbf{n}_2(\mathbf{x}), \mathbf{n}_3(\mathbf{x})$ et des tailles $h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), h_3(\mathbf{x})$ suivant ces directions qui donnent une densité locale $d(\mathbf{x})$. On considère alors que le maillage est entièrement déterminé par la donnée de cette métrique.

On s'intéresse ici à la métrique $\mathcal{M}$ qui représente au mieux en norme $\mathbf{L}^p$ une solution analytique u définie sur $\mathbb{R}^3$ pas nécessairement continue. Le calcul de $\mathcal{M}$ repose sur **(i)** une modélisation locale de l'erreur $e_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ pour une interpolation $\mathcal{P}_1$ dans la métrique $\mathcal{M}$ et **(ii)** un calcul de variation globale afin de trouver la métrique optimale $\mathcal{M}^*$ qui minimise l'erreur locale $e_{\mathcal{M}}$ en norme $\mathbf{L}^p$:

$$\mathcal{M}^* = \mathrm{Argmin}_{\mathcal{M}} \int_{\Omega} |e_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|^p \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Afin de supprimer la solution triviale qui aboutit une erreur nulle, correspondant à un maillage infiniment fin, on contraint le nombre de nœuds N du maillage défini par $\int_{\Omega} d(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.
Contrairement à l'approche géométrique où seule une estimationn $\mathbf{L}^\infty$ est dérivée [3], cette approche permet de déterminer une métrique adaptée aux phénomènes physiques étudiés, dans le but de capturer plus finement certaines variations de faibles amplitudes. De plus, une estimation continue de l'ordre de convergence en maillage est alors disponible.

Numériquement, des exemples en 2 et 3 dimensions comparent les métriques obtenues pour les normes $\mathbf{L}^1$, $\mathbf{L}^2$ et $\mathbf{L}^\infty$ pour des solutions analytiques données plus ou moins régulières. Des écoulements eulériens sont également présentés pour montrer l'efficacité de l'approche préconisée. Enfin, pour chaque exemple, une analyse des ordres de convergence numérique est donnée.

Références

[1] Francois Courty, David Leservoisier, Paul-Louis George, Alain Dervieux, *Continuous metrics and mesh adaptation*, Applied numerical mathematics , 2003.

[2] Weizhang Huang, *Metric tensors for anisotropic mesh generation*, Journal of computational physics, 2004.

[3] Pascal-Jean Frey, Frédéric Alauzet, *Anisotropic mesh adaptation for CFD computation*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2004.

Adrien LOSEILLE – `Adrien.Loseille@inria.fr`
Domaine de Voluceau, BP 105, F-78143 Le Chesnay Cedex
Frédéric ALAUZET – `Frederic.Alauzet@inria.fr`
Domaine de Voluceau, BP 105, F-78143 Le Chesnay Cedex
Alain DERVIEUX – `Alain.Dervieux@sophia.inria.fr`
INRIA, BP 105, F-06902 Sophia Anitipolis