Une nouvelle approche conservative du problème de contact en élastodynamique

Houari Boumediène KHENOUS, INSA de Toulouse
Patrick LABORDE, Laboratoire MIP
Yves RENARD, INSA de Toulouse

Mots-clés : élastodynamique, contact unilatéral, conservation de l'énergie, matrice de masse redistribuée.

Le problème de contact élastodynamique semi-discrétisé en espace est décrit par le système

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } U \in]0,T[\times \mathbb{R}^d \ \text{ et } \ ((\Lambda_N)_i) \in]0,T[\times \mathbb{R}^m \ \text{ satisfaisants} \\ M\ddot{U} + KU = L + \displaystyle\sum_{i \in I_C} \Lambda_N^i N_i, \ \text{ in } [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ \Lambda_N^i \leq 0, \ U.N_i \leq 0, \ \Lambda_N^i (U.N_i) = 0, \forall\, i \in I_C, \\ U(0) = U^0, \dot{U}(0) = U^1, \end{array}\right. \tag{1}$$

où d est le nombre de degrés de liberté (ddl) pour le déplacement U, les notations M, K, F désignent respectivement la matrice de masse, la matrice de rigidité et les densités de forces données, I_C est l'ensemble des indices du bord de contact. En chaque noeud $i \in I_C$, on note Λ_N^i et N_i la force normale et la normale unité sortante.

La difficulté est que le problème (1) est mal posé (voir les travaux de Moreau ou Paoli). Pour retrouver l'unicité, une des méthodes qui est bien adaptée aux corps rigides est d'introduire une loi d'impact avec un coefficient de restitution. L'approche s'avère moins satisfaisante dans le cas des corps élastiques déformables car quelque soit le choix du coefficient de restitution, le problème (1) tend vers une restitution totale de l'énergie quand le pas d'espace tend vers zéro (voir [1] pour plus de détails).

On présente d'abord une condition de contact équivalente qui est exprimée en terme de vitesse qui doit être comprise au sens de la dérivée à droite du déplacement. Cette loi est très proche de celle présentée par Moreau et correspond aussi à celle introduite par Laursen and Chawla. De plus, on note que cette condition implique la non-interpénétration. On discrétise l'équation de l'élastodynamique en (1) par un schéma de point milieu standard. La condition de contact est approchée en utilisant un schéma de différences finies centrées. On montre alors que la stabilité du schéma ainsi obtenu est assurée par le fait que l'énergie discrète est conservée. La différence essentielle avec le schéma présenté par Laursen and Chawla est l'approximation de la condition de contact par un schéma centré aux différences finies.

Dans la suite, on traite la deuxième approche qui consiste à considérer une répartition de la masse du corps de telle sorte que les points du bord de contact n'aient pas d'inertie. La nouvelle matrice de masse est équivalente à la matrice de masse initiale dans le sens où on impose la conservation de la masse totale, du centre de gravité et des moments d'inertie. En effet, le caractère mal posé du problème (1) vient du fait que les points du bord de contact ont leur propore inertie. Cette approche nous permet d'obtenir un problème bien posé qui admet une solution Lipschitzienne et conserve l'énergie. Une démonstration complète de ces deux résultats sera présentée dans [1].

Enfin, on présente des résultats numériques obtenus sur des simulations de chute libre d'un disque élastique.

Références

[1] H.B. Khenous, PhD thesis, INSA de Toulouse, defended in november, 25^{th}, 2005.

Houari Boumediène KHENOUS – `khenous@insa-toulouse.fr`
INSA-MIP-CNRS (UMR 5640), Département GMM, 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex4
Patrick LABORDE – `laborde@mip.ups-tlse.fr`
UPS-MIP, 118 route de Narbonne, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex4
Yves RENARD – `renard@insa-toulouse.fr`
INSA-MIP, Département GMM, 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex4