Lois de Conservation Scalaires à Flux Discontinu

Julien JIMENEZ, Université de Pau & CNRS

Mots-clés : lois de conservation, solution entropique, flux discontinu

On effectue l'analyse mathématique du problème de Dirichlet pour une équation quasi linéaire hyperbolique du premier ordre dont le terme de convection est discontinu par rapport à la variable spatiale. Ainsi, étant donné un domaine unidimensionnel borné Ω et un réel T strictement positif et fini, le problème considéré peut-être formellement décrit par:
Trouver une fonction mesurable u sur $Q =]0,T[\times\Omega$ tel que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(k(x)g(u)) = \quad & 0 \quad \text{dans } Q, & (1)\\ u(0,.) = \quad & u_0 \quad \text{sur } \Omega, & (2)\\ u = \quad & 0 \quad \text{sur (une partie de)} \;\;]0,T[\times\partial\Omega, & (3) \end{aligned}$$

où u_0 est une fonction mesurable et bornée.
On suppose que k est une fonction discontinue en un point x_0 du domaine d'étude.
La définition d'une formulation faible entropique pour le problème de Cauchy associé à (1) a été introduite par J.D Towers dans [2]. Lorsque la fonction g est donnée par $g(u) = u(1-u)$ et lorsque k est constante par morceaux, l'existence d'une solution entropique est obtenue dans [1] par régularisation de k. L'unicité est établie par une technique de dédoublement des variables en considérant les traces fortes, au sens de Vasseur ([3]), d'une solution entropique le long de la ligne de discontinuité $\{x = x_0\}$, de sorte à y exprimer une condition d'entropie et une relation de Rankine-Hugoniot.
On généralise la définition donnée par J.D Towers et on adapte la méthode utilisée dans [1] pour établir l'existence et l'unicité d'une solution faible entropique au problème (1,2,3) pour une certaine classe de fonctions g et lorsque k est lipschitzienne en dehors de $\{x = x_0\}$ et non nulle presque partout sur Ω. Cette solution u de $L^\infty(Q)$ est caractérisée par la formulation faible entropique :
(i) $\forall\kappa\in\mathbb{R}$, $\forall\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\Omega)$, $\varphi\geq 0$,

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_Q (|u(t,x)-\kappa|\varphi_t(t,x) + k(x)\Phi(u,\kappa)\varphi_x(t,x))dxdt - \int_Q k'(x)sgn(u-\kappa)g(\kappa)\varphi dxdt \\ & \qquad + \int_\Omega |u_0-\kappa|\varphi(0,x)dx + |(k_L-k_R)g(\kappa)| \int_0^T \varphi(t,0)dt \quad \geq 0 \ , \end{aligned} \right.$$

où $\Phi(u,\kappa) = sgn(u-\kappa)(g(u)-g(\kappa))$.
(ii) pour presque tout t de $]0,T[$ et pour tout réel κ,

$$\begin{aligned} k(1)(sgn(u_1^\tau(t)-\kappa)+sgn(\kappa))(g(u_1^\tau(t)-g(\kappa)) \quad & \geq \quad 0,\\ k(-1)(sgn(u_{-1}^\tau(t)-\kappa)+sgn(\kappa))(g(u_{-1}^\tau(t)-g(\kappa)) \quad & \leq \quad 0, \end{aligned}$$

u_1^τ et u_{-1}^τ désignant les traces de u respectivement en $(+1)^-$ et en $(-1)^+$ au sens de A.Vasseur [3].

Références

[1] N. Seguin, J. Vovelle, *Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients*, Math. Models Appl. Sci., 13 no.2, 221-257, 2003.

[2] J. D. Towers, *Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux*, SIAM J. Numer. Anal., 38 681-698, 2000.

[3] A. Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Arch. Rational. Mech., 160 181-193, 2001.

Julien JIMENEZ – `julien.jimenez@univ-pau.fr`
Université de Pau & CNRS, Laboratoire de Mathématiques Appliquées UMR 5142 CNRS, IPRA, BP 1155, 64013 Pau Cedex