Un algorithme de décomposition de domaine de type Robin pour un problème de contact.

Mohamed Ali IPOPA, Université de Caen
Taoufik SASSI, Université de Caen

Mots-clés : décomposition de domaine, contact unilatéral, frottement, algorithme de Robin-Robin, opérateur de Steklov-Poincaré.

Soit deux corps élastiques occupant les domaines $\overline{\Omega}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'ils peuvent entrer en contact unilatéralement et sans frottement à travers une zone de contact notée $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. Le problème consiste à trouver les déplacements $\boldsymbol{u}^\alpha$ et les contraintes $\sigma(\boldsymbol{u}^\alpha)$ tels que:

$$\left\{\begin{array}{lll} -div(\sigma(\boldsymbol{u})) & = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2, \\ \sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} & = \boldsymbol{\varphi}_l & \text{sur } \Gamma_l = \Gamma_l^1 \cup \Gamma_l^2, \\ \boldsymbol{u} & = 0 & \text{sur } \Gamma_{\boldsymbol{u}} = \Gamma_{\boldsymbol{u}}^1 \cup \Gamma_{\boldsymbol{u}}^2, \\ \sigma_T & = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_N \leq 0, & [\boldsymbol{u}_N] \leq 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_N[\boldsymbol{u}_N] & = 0 & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{1}$$

Les premiers algorithmes de résolution de ce type de problème avaient le mauvais goût de dissocier les interfaces numériques de résolution et les interfaces physiques de contact. Les algorithmes prenant en compte l'interface physique du contact ont, par la suite, été développés notamment Dirichlet-Neumann et Neumann-Neumann [2]. Ces deux algorithmes présentent néanmoins l'inconvénient de conduire à la résolution de deux problèmes de type différents sur chacun des sous-domaines. Le but de ce travail est d'adapter l'algorithme de Robin-Robin développé dans [3] au cadre du contact. L'un des intérêts de cet algorithme, contrairement à [2], est de résoudre un problème de même type sur chaque sous-domaine. Il en résultera donc non seulement une généralisation à plus de deux corps plus facile mais aussi une parallélisation beaucoup plus aisée à mettre en place. Notre algorithme de résolution est le suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} -div(\sigma(\boldsymbol{u}^\beta)) = \boldsymbol{f}^\beta & \text{dans } \Omega^\beta,\ \beta = 1, 2, \\ \sigma(\boldsymbol{u}^\beta)\boldsymbol{n}^\beta = \boldsymbol{\varphi}_l^\beta & \text{sur } \Gamma_l^\beta, \\ \boldsymbol{u}^\beta = 0 & \text{sur } \Gamma_{\boldsymbol{u}}^\beta, \\ \sigma_T^\beta = 0, \sigma_N^\beta \leq 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_N^1 + \alpha_{S_1}\boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1 \leq \sigma_N^2 - \alpha_{S_1}\boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2 & \text{sur } \Gamma_c\, (pour \beta = 1), \\ \sigma_N^2 + \alpha_{S_2}\boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2 \leq \sigma_N^1 - \alpha_{S_2}\boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1 & \text{sur } \Gamma_c\, (pour \beta = 2), \\ \sigma_N^1(\boldsymbol{u}^1\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{n}^2) = 0 & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{2}$$

α_{S_1} et α_{S_2} désignent des constantes positives ou— des opérateurs définis de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ [1]. Nous allons d'une part montrer l'équivalence entre (1) et (2), d'autre part nous prouverons la convergence de notre algorithme. Enfin nous présenterons quelques résultats numériques.

Références

[1] V. I. Agoshkov, *Poincaré-Steklov's Opérators and Domain Decomposition Methods in Finite Dimensional Spaces*, In Proceeding of the first International Symposium on Domain Decomposition Methods, Paris, France, Juanuary (1987), SIAM, Philadelphia, 1988.

[2] G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi, *A Neumann-Neumann Domain Decomposition Algorithm for Signorini Problem*, Applied Mathematics Letters, Letters 17(2004) 1153-1159.

[3] W. Guo, L. S. Hou, *Generalisation and Accelerations of LION's Nonoverlapping Domain Decomposition Method for linear elliptic PDE*, SIAM J. Numer Anal, vol. 41, No.6, pp 2056-2080.

Mohamed Ali IPOPA – `Mohamed.Ipopa@math.unicaen.fr`
LMNO, Université de Caen, Campus II, S3 117, Bd Maréchal JUIN, 14032, Caen cedex
Taoufik SASSI – `Taoufik.Sassi@math.unicaen.fr`
LMNO, Université de Caen, Campus II, Bd Maréchal JUIN, 14032, Caen cedex