Méthode à deux grilles d'ordre deux en temps pour Navier-Stokes non stationnaire incompressible

Hyam ABBOUD, Université Pierre et Marie Curie & Université Saint-Joseph.

Mots-clés : Schéma à deux grilles, problème non-linéaire, fluide incompressible, discrétisation d'ordre deux en temps, éléments finis d'ordre deux.

Nous étudions un schéma à deux grilles pour le problème de Navier-Stokes, en dimension deux, instationnaire totalement discrétisé en espace (par une méthode d'éléments finis d'ordre 2) et en temps (par un schéma d'ordre 2).

L'idée de cette méthode consiste, dans une première étape, à discrétiser le problème non-linéaire en espace et en temps sur une grille grossière de pas d'espace H avec un pas de temps Δt, puis dans une deuxième étape, à résoudre le problème discrétisé en espace sur une grille fine de pas d'espace h et le même pas de temps autour de la vitesse $\mathbf{u}_H$ calculée à l'étape précédente. Nous proposons le schéma d'ordre deux en temps suivant :

Etape 1 **Problème non-linéaire sur grille grossière:** Trouver $(\mathbf{u}_H^{n+1}, p_H^{n+1}) \in X_H \times M_H$, solution de

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{v}_H \in X_H,\ \ \frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_H^{n+1} - 4\mathbf{u}_H^{n} + \mathbf{u}_H^{n-1}, \mathbf{v}_H) \ +\ \nu(\nabla \mathbf{u}_H^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_H) \ +\ (\mathbf{u}_H^{n+1}\cdot\nabla\mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{v}_H) \\ +\frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u}_H^{n+1}, \mathbf{u}_H^{n+1}\cdot\mathbf{v}_H) - \ (p_H^{n+1}, \operatorname{div}\mathbf{v}_H) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_H\rangle,\end{aligned} \tag{1}$$

$$\forall q_H \in M_H, \qquad (q_H, \operatorname{div}\mathbf{u}_H^{n+1}) = 0. \tag{2}$$

Etape 2 **Problème linéarisé sur grille fine:** Trouver $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h \times M_h$, solution de

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{v}_h \in X_h,\ \ \frac{1}{2\Delta t}(3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^{n} + \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) \ +\ \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) \ +\ (\mathbf{u}_H^{n+1}\cdot\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ -\ (p_h^{n+1}, \operatorname{div}\mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h\rangle,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\forall q_h \in M_h, \qquad (q_h, \operatorname{div}\mathbf{u}_h^{n+1}) = 0. \tag{4}$$

Nous complétons ces équations par les conditions initiales suivantes: $\mathbf{u}_H^0 = \mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{u}_H^1$ et $\mathbf{u}_h^1$ qui sont calculés par une itération du schéma d'Euler.

Le travail est divisé en deux étapes: l'une théorique qui consiste à calculer toutes les estimations d'erreur correspondantes et l'autre numérique qui porte sur l'implémentation informatique (à l'aide du logiciel $FreeFem++$) des problèmes et la validation des résultats théoriques obtenus. Le but de ces deux étapes est d'obtenir une méthode moins coûteuse, mais qui a le même ordre d'erreur que si le problème non-linéaire était résolu directement sur la grille fine. On espère donc diminuer la complexité du schéma numérique. L'idée de la méthode à deux grilles est que, sous des hypothèses adéquates, la contribution de $\mathbf{u}_H$ à l'erreur dans le terme non-linéaire en espace, est mesurée en norme L^2 en espace et en temps et a un ordre plus élevé que si elle était mesurée en norme H^1. Nous présentons le résultat suivant:

Si $h^2 = (\Delta t)^2 = H^3$, alors l'erreur globale de l'algorithme à deux grilles est de l'ordre de h^2, résultat identique à celui de la résolution directe du problème non-linéaire sur une grille fine.

Références

[1] H. Abboud, V. Girault & T. Sayah *Two-grid finite element scheme for the fully discrete time-dependent Navier-Stokes problem*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

[2] V. Girault & J.-L. Lions *Two-grid finite-element schemes for the transient Navier-Stokes equations*, M2AN 35, 945-980 (2001).

[3] F. Hecht & O. Pironneau *FreeFem++*, http://www.freefem.org.

Hyam ABBOUD – `abboud@ann.jussieu.fr`
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 75252 *Paris CEDEX France & Département de mathématiques, Faculté des Sciences, Université Saint-Joseph, B.P* 11 – 514– *Riad El Solh Beyrouth,* 1107 2050–*Liban.*