

Local space-time refinement via optimized Schwarz waveform relaxation

Laurence HALPERN, Université Paris 13

1 Résumé

Nous montrons ici comment les algorithmes de Schwarz avec relaxation d’ondes sont un outil puissant pour développer des méthodes de raffinement local, en temps et en espace, dans le cadre des schémas volumes finis. Nous présentons une analyse détaillée dans le cas de l’équation des ondes en dimension 1, mais ces résultats se généralisent en dimension supérieure.

2 Introduction

Le développement des ressources informatiques a suscité des problématiques nouvelles en matière de parallélisme. A la nécessité de la décomposition de domaines pour des raisons de place mémoire s’est ajouté le désir de modéliser des phénomènes de plus en plus complexes, nécessitant le couplage de modèles différents, avec des échelles de temps et d’espace différents, pouvant aller de quelques secondes à quelques années, voire quelques millions d’années, dans des problèmes comme le couplage océan-atmosphère, la combustion, le stockage de déchets radioactifs. Il est important de disposer de méthodes générales permettant de coupler différents modèles, en gardant une grande souplesse dans le choix des pas de temps et d’espace pour chaque problème. L’une des étapes de la réflexion est de savoir raffiner localement. Nous proposons pour cela d’écrire un modèle couplé, de l’approcher par un algorithme de Schwarz avec relaxation d’ondes (*i.e.* global en temps). Si les premiers résultats numériques que nous avons à ce jour concernent uniquement la dimension 1, la démarche s’applique également pour des problèmes plus complexes en dimension supérieure.

Nous présentons les notions essentielles dans le cas particulier très simple de l’équation des ondes homogène. Les résultats et démonstrations complets peuvent être trouvés dans [7]. Nous commençons par décrire la méthode, qui consiste à décomposer le problème sur deux sous-domaines et calculer la solution à l’aide d’un algorithme de type Schwarz avec conditions de transmission optimales. Nous définissons la stabilité du problème couplé, avec une perturbation sur l’interface. Nous introduisons ensuite un schéma volumes finis d’approximation de ce problème couplé, dont nous établissons la stabilité au sens de la définition précédente. Ceci nous permet d’établir l’ordre de convergence du schéma. Pour cela, nous utilisons une nouvelle méthode, consistant à construire une suite d’approximations du problème par des équations des ondes discrètes rétrogrades. Notons que pour les méthodes de raffinement “classiques” comme les méthodes d’interpolation ou de points fictifs, aucune preuve de convergence n’est connue. Nous comparerons d’ailleurs plusieurs méthodes.

Nous présentons ensuite l’extension de la méthode à l’équation d’advection-diffusion et nous montrons des résultats préliminaires.

3 Equation des ondes en dimension 1

Nous considérons l’équation des ondes homogène, avec une vitesse égale à 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ u_i(\cdot, 0) &= p, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(\cdot, 0) = q \quad \text{dans } \Omega_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Si l’on souhaite utiliser des maillages en espace différents dans différentes parties du domaine, pour des raisons de dispersion numériques, il faut aussi raffiner en temps. Il est possible d’utiliser une interpolation entre la grille fine et grossière, comme il a été proposé par M. Berger, mais cela pose des problèmes de stabilité, voir [2][4]. Nous allons procéder différemment.

3.1 Le problème de couplage continu

\mathbb{R} est découpé en sous-domaines $\Omega_i =]a_i, a_{i+1}[$, et nous écrivons un problème de transmission en espace-temps sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_i &= 0 & x \in \Omega_i, t \in (0, T) \\ \mathcal{B}_i^- u_i &= \mathcal{B}_i^- u_{i-1} & x = a_i, t \in (0, T) \\ \mathcal{B}_i^+ u_i &= \mathcal{B}_i^+ u_{i+1} & x = a_{i+1}, t \in (0, T), \\ u_i(\cdot, 0) &= p & \text{dans } \Omega_i, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(\cdot, 0) &= q & \text{dans } \Omega_i, \end{aligned} \quad (2)$$

Si les opérateurs \mathcal{B}_i sont bien choisis, ce problème est équivalent à (1), et u coïncide avec u_i dans le sous-domaine Ω_i . Nous choisissons ici comme opérateurs \mathcal{B}_i les opérateurs de transport sortant du domaine, $\mathcal{B}_i^\pm = \mathcal{B}^\pm = \partial_x \pm \partial_t$ et pour calculer les u_i nous introduisons l'algorithme de Schwarz global en temps

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_i^{n+1} &= 0 & x \in \Omega_i, t \in (0, T) \\ \mathcal{B}^- u_i^{n+1} &= \mathcal{B}^- u_{i-1}^n & x = a_i, t \in (0, T) \\ \mathcal{B}^+ u_i^{n+1} &= \mathcal{B}^+ u_{i+1}^n & x = a_{i+1}, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3)$$

Théorème 3.1 *Si $T < T_0 = \min_{1 < i < I} |a_{i+1} - a_i|$, l'algorithme (3) converge en 2 itérations.*

Ce résultat mène à l'utilisation de fenêtres en temps de taille T_0 pour le calcul effectif. Faisons maintenant une étude de stabilité du problème de transmission. On a dans chaque domaine Ω_i ,

$$E_{\Omega_i}(u_i)(t) + \frac{1}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^+ u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^- u_i(a_{i+1}, s))^2] ds = \frac{1}{4} \int_0^t [(\mathcal{B}^- u_i(a_i, s))^2 + (\mathcal{B}^+ u_i(a_{i+1}, s))^2] ds + E_{\Omega_i}(u_i)(0).$$

o $E_{\Omega_i}(u_i)$ est l'énergie totale dans le domaine Ω_i . En sommant sur les sous-domaines, on en déduit la conservation de l'énergie pour (2) et la convergence de l'algorithme (3) pour une vitesse quelconque [6]. Il en va tout autrement lorsque l'on étudie la stabilité du problème, c'est-à-dire si l'on considère des conditions de transmission $\mathcal{B}^- u_i = \mathcal{B}^- u_{i-1} + g_i^-$ en a_i , $\mathcal{B}^+ u_i = \mathcal{B}^+ u_{i+1} + g_i^+$ en a_{i+1} . On procède alors à un **relèvement rétrograde** :

Théorème 3.2 *Si $T < T_0 = \min_{1 < i < I} |a_{i+1} - a_i|$, pour chaque i , il existe w_{i-1}^- solution de l'équation des ondes dans $\Omega_{i-1} \times (0, T)$ et w_i^+ solution de l'équation des ondes dans $\Omega_i \times (0, T)$, telles que $w_{i-1}^-(\cdot, T) = \partial_t w_{i-1}^-(\cdot, T) = 0$ et $w_i^+(\cdot, T) = \partial_t w_i^+(\cdot, T) = 0$, avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^- w_{i-1}^-(a_i, \cdot) &= g_i^-, & E_{\Omega_{i-1}}(w_{i-1}^-)(t) &\leq \frac{1}{4} \|g_i^-\|_{L^2(0, T)}^2, \\ \mathcal{B}^+ w_i^+(a_i, \cdot) &= g_i^+, & E_{\Omega_i}(w_i^+)(t) &\leq \frac{1}{4} \|g_i^+\|_{L^2(0, T)}^2. \end{aligned}$$

De plus, par la vitesse finie de propagation, on a $\mathcal{B}^+ w_{i-1}^-(a_i, \cdot) = 0$ et $\mathcal{B}^- w_i^+(a_i, \cdot) = 0$.

Dans l'ensemble des sous-domaines, on a la situation décrite Figure 1.

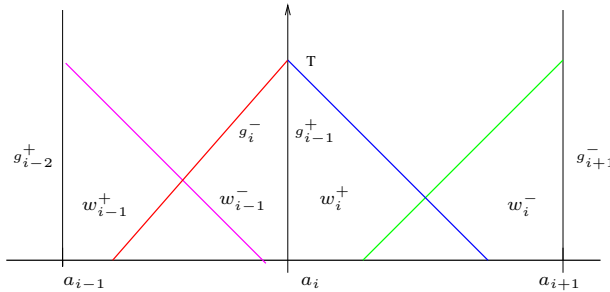


Figure 1: relèvement rétrograde

Posons $w_i = w_i^- + w_i^+$ pour tout i . Par le théorème 3.2, on peut réécrire les conditions de transmission à l'aide des w_i^\pm ,

$$\mathcal{B}^-(u_i + w_i)(a_i, \cdot) = \mathcal{B}^-(u_{i-1} + w_{i-1})(a_i, \cdot), \mathcal{B}^+(u_i + w_i)(a_{i+1}, \cdot) = \mathcal{B}^+(u_{i+1} + w_{i+1})(a_{i+1}, \cdot).$$

En appliquant l'estimation d'énergie à $u_i + w_i^- + w_i^+$ dans Ω_i , et en sommant sur les sous-domaines, on obtient

$$\sum_i E_{\Omega_i}(u_i + w_i)(t) \leq \sum_i E_{\Omega_i}(u_i + w_i)(0),$$

puis, grâce aux estimations du théorème 3.2, le résultat de stabilité

$$\sum_i E_{\Omega_i}(u_i)(t) \leq \alpha [\|\partial_x p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\pm} \sum_{i=1}^I \|g_i^{\pm}\|_{L^2(0,T)}^2].$$

3.2 Le problème de couplage discret

Nous introduisons une discrétisation d'ordre 2 du problème aux limites dans chaque sous-domaine, obtenue par une méthode de volumes finis "vertex centered". Les notations sont données par la Figure 2.

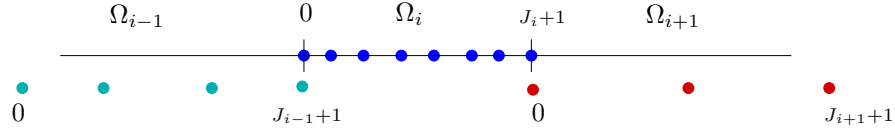


Figure 2: Notations pour le schéma

Pour Δt constant, l'algorithme s'écrit

$$\begin{aligned} (D_t^+ D_t^- - D_x^+ D_x^-) U_i(j, n) &= 0 \quad 1 \leq j \leq J_i, 1 \leq n \leq N_i, \\ B_i^- U_i(0, \cdot) &= \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \\ B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) &= \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) \end{aligned}$$

où les opérateurs de transmission sont donnés par

$$\begin{aligned} B_i^+ U_i &= \left(\frac{\Delta x_i}{2} D_t^+ D_t^- + D_x^- + D_t^0 \right) U_i \text{ en } (J_i + 1, n), \\ \tilde{B}_i^+ U_{i+1} &= \left(-\frac{\Delta x_{i+1}}{2}, D_t^+ D_t^- + D_x^+ + D_t^0 \right) U_{i+1} \text{ en } (0, n) \end{aligned}$$

et de façon similaire pour B_i^-, \tilde{B}_i^- .

Pour $\gamma_i = \Delta t_i / \Delta x_i < 1$, nous définissons une énergie discrète $E(U_i)$, et nous pouvons établir l'identité d'énergie discrète

$$\begin{aligned} E(U_i)(n) - E(U_i)(n-1) &+ \frac{\Delta t}{2} [(\tilde{B}_{i-1}^+ U_i(0, n))^2 + (\tilde{B}_{i+1}^- U_i(J+1, n))^2] \\ &= \frac{\Delta t}{2} [(B_i^- U_i(0, n))^2 + (B_i^+ U_i(J+1, n))^2]. \end{aligned}$$

Cette identité donne la stabilité du problème aux limites par rapport aux conditions initiales, et l'ordre 2 de la discrétisation du problème aux limites dans chaque sous-domaine. Lorsque les pas de temps sont différents par sous-domaines, $\Delta t = \Delta t_i$ dans Ω_i , on a

$$B_i^- U_i(0, \cdot) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq +\mathcal{K}}}, \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq -\mathcal{K} + \mathcal{K}}}.$$

On introduit alors une projection L^2 sur V_i , espace des fonctions affines par morceaux sur la grille de pas Δt_i , et les conditions de transmission

$$B_i^- U_i(0, \cdot) = \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) \quad B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) = \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot).$$

Les opérateurs de projection étant contractants, on obtient l'existence, l'unicité pour le problème de couplage, ainsi que la convergence de l'algorithme de Schwarz discret permettant de calculer la solution. Par contre, si l'on veut étudier la stabilité du problème de couplage, et obtenir des estimations d'erreur, on doit procéder comme dans le cas continu, mais c'est ici beaucoup plus compliqué. Soient les conditions de transmission

$$B_i^- U_i(0, \cdot) = \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_i^- U_{i-1}(J_{i-1} + 1, \cdot) + G_i^-, \quad B_i^+ U_i(J_i + 1, \cdot) = \mathbb{P}_{i+1,i} \tilde{B}_i^+ U_{i+1}(0, \cdot) + G_i^+.$$

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses $\gamma_i < 1$ et $T < \inf_i \gamma_i (a_{i+1} - a_i)$, il existe deux relèvements rétrogrades W_i^+ dans Ω_i et W_{i-1}^- dans Ω_{i-1} tels que*

$$\begin{aligned} B_i^- W_i^+(0, \cdot) - \mathbb{P}_{i,i-1} \tilde{B}_i^- W_{i-1}^-(J_{i-1} + 1, \cdot) - G_i^- &= R_{i,i-1}, \\ B_{i-1}^+ W_{i-1}^-(J_{i-1} + 1, \cdot) - \mathbb{P}_{i-1,i} \tilde{B}_{i-1}^+ W_i^+(0, \cdot) - G_{i-1}^+ &= R_{i-1,i} \end{aligned}$$

$R_{i,i-1}$ appartient à l'orthogonal de $\text{Im } \mathbb{P}_{i,i-1}$ dans V_i , $R_{i-1,i}$ à l'orthogonal de $\text{Im } \mathbb{P}_{i-1,i}$ dans V_{i-1} , et

$$\begin{aligned} E(W_{i-1}^-)(0) + E(W_i^+)(0) &\leq \alpha(\|G_i^-\|_i + \|G_{i-1}^+\|_{i-1}), \\ \|\|R_{i,i-1}\|\|_i + \|\|R_{i-1,i}\|\|_{i-1} &\leq \alpha(\|G_i^-\|_i + \|G_{i-1}^+\|_{i-1}). \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème se fait par une méthode d'approximations successives [7]. Une fois que l'on a ce résultat, on définit, dans chaque Ω_i , $\tilde{U}_i = U_i - W_i^- - W_i^+$, auquel on applique l'estimation d'énergie discrète:

$$\sum_i E(\tilde{U}_i)(N_i + 1) \leq E(\tilde{U}_i)(0) + \sum_i [\|\|R_{i,i-1}\|\|_i^2 + \|\|R_{i-1,i}\|\|_{i-1}^2].$$

On établit alors la stabilité au moyen des estimations du théorème, puis un résultat de précision :

Théorème 3.4 *Si $\gamma_i < 1$ et $2T < \inf_i \frac{\gamma_i}{c}(a_{i+1} - a_i)$, alors le schéma est globalement d'ordre 2 en temps et en espace.*

3.3 Performances numériques

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre d'application des résultats théoriques précédents. Les données physiques et numériques sont

$$\begin{aligned} \Omega_1 = (0, 100), \Omega_2 = (100, 110), T = 200; c_1 = c_2 = 1; \\ \Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 0, 5, \Delta t_1, \Delta t_2 \text{ tels que } \gamma_1 = \gamma_2 = 0, 9524. \end{aligned} \quad (4)$$

Une condition transparente est imposée à chaque extrémité. La condition initiale est une fonction de Harris introduite dans [4]. Nous comparons notre méthode à deux autres méthodes : la "I-method" est l'application d'une stratégie d'interpolation à l'interface, et la "E-method" développée dans [4], repose sur des considérations énergétiques. Nous représentons Figure 3 les erreurs ℓ^∞ en temps et en espace dans les deux sous-domaines en fonction du pas de temps, pour les mêmes données que précédemment. Les pas initiaux sont donnés par (4), puis divisés par 2 à chaque raffinement. Nous voyons que notre méthode est d'ordre 2 dans chaque sous-domaine, contrairement aux deux autres méthodes. Nous étendons maintenant la méthode. Nous prenons

$$\begin{aligned} \Omega_1 = (0, 1), \Omega_2 = (1, 2), T = 1; c_1 = 1, c_2 = 1, 7; \\ \Delta x_1 = 0, 1, \Delta x_2 = 0, 1, \Delta t_1, \Delta t_2 \text{ tels que } \gamma_1 = \gamma_2 = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

La donnée initiale est encore une fonction de Harris. Le schéma est exact dans chaque sous-domaine. Ensuite les pas de temps et d'espace sont divisés par 2. Le résultat est reporté Figure 4, et nous voyons que la méthode est encore d'ordre 2.

Nous avons aussi considéré l'intervalle $[0, 6]$, divisé en 6 couches de vitesse $c_i \in \{1, 2/3, 1/2, 3/4, 4/5\}$. Les 6 domaines numériques sont alignés avec les discontinuités. Il faut 6 itérations pour arriver à la solution exacte. Si l'on fait le calcul dans des fenêtres en temps de taille 1, dans chaque fenêtre il faut seulement 2 itérations pour converger vers la solution exacte, ce qui épargne beaucoup de temps calcul.

4 Equation d'advection-diffusion en dimension 1

Soit l'équation d'advection-diffusion,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \nu \partial_{xx} + a \partial_x + c)u &= f \quad \text{dans } \mathbb{R}, \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

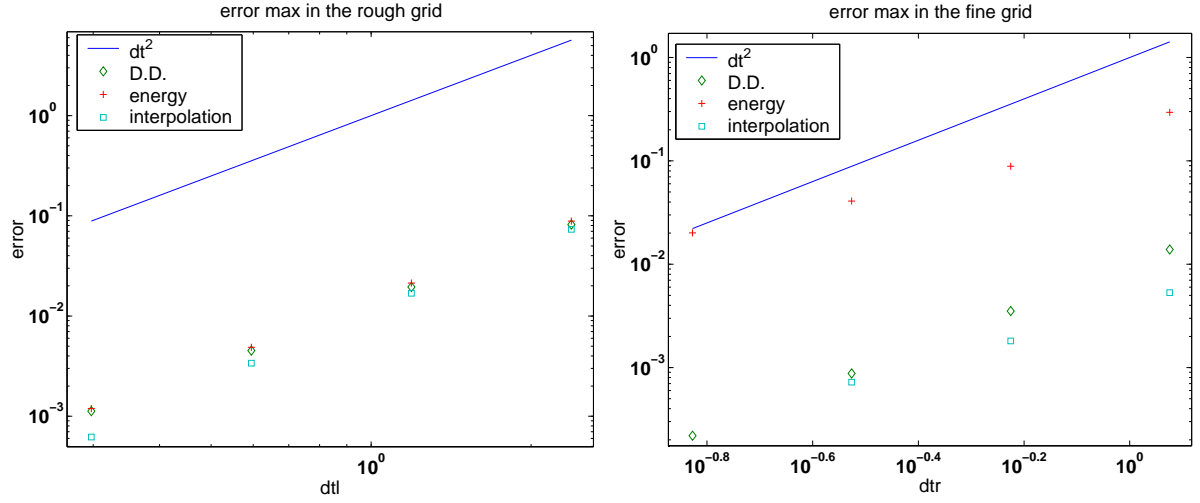


Figure 3: Cas (4). Erreur de discrétisation des différentes méthodes en fonction du pas de temps, échelle logarithmique. A gauche la grille grossière, à la droite la grille fine. Comparaison entre les 3 méthodes.

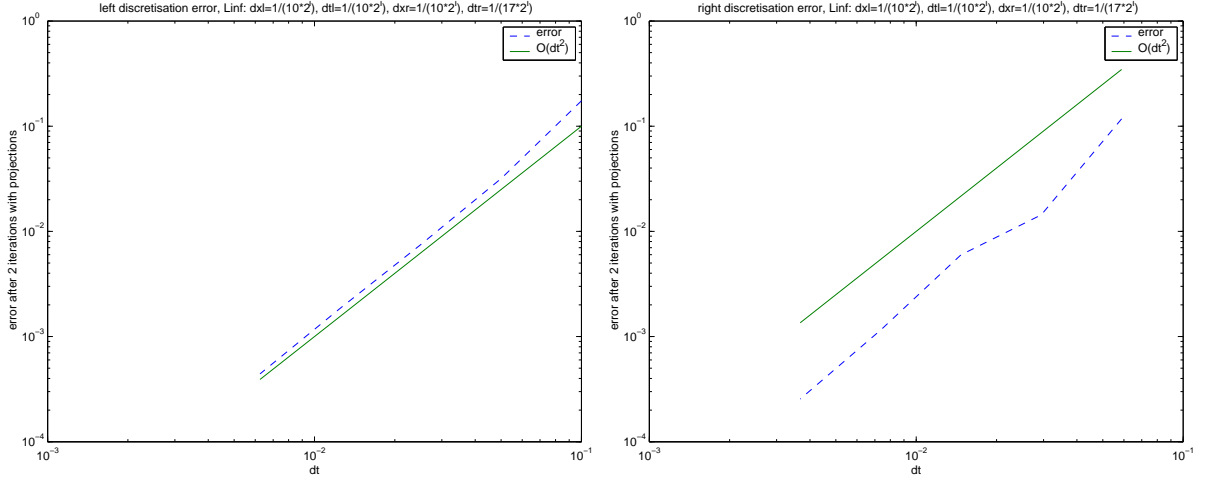


Figure 4: Cas (5). Erreur de discrétisation en fonction du pas de temps, échelle logarithmique. Sur la gauche la grille grossière, sur la droite la grille fine.

Nous n'avons plus de conditions de transmission optimale à notre disposition. Néanmoins nous pouvons toujours écrire un problème couplé. Pour fixer les idées supposons que les coefficients sont constants par sous-domaine.

$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \nu \partial_{xx} + a \partial_x + c)u_i &= f && \text{dans } \Omega_i \times]0, T[\\
 u_i(\cdot, 0) &= u_0 && \text{dans } \Omega_i \\
 (-\nu_i \partial_x + a_i + \mathcal{S}_i^+)u_i(a_{i+1}, \cdot) &= (-\nu_{i+1} \partial_x + a_{i+1} + \mathcal{S}_i^+)u_{i+1}(a_{i+1}, \cdot) && \text{dans }]0, T[\\
 (-\nu_i \partial_x + a_i + \mathcal{S}_i^-)u_i(a_i, \cdot) &= (-\nu_{i-1} \partial_x + a_{i-1} + \mathcal{S}_i^-)u_{i-1}(a_i, \cdot) && \text{dans }]0, T[
 \end{aligned}$$

Le choix des opérateurs \mathcal{S}_i^\pm conditionne la vitesse de convergence de l'algorithme de Schwarz vers la solution du problème couplé. Nous avons jusqu'ici choisi des opérateurs du type $\mathcal{S}_i^\pm = \alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \partial_t$, où les constantes α_i^\pm et β_i^\pm sont définies de façon que les problèmes aux limites associés soient bien posés, les algorithmes de Schwarz convergents, et le taux de convergence soit aussi petit que possible. Nous avons des résultats préliminaires pour un schéma d'ordre 1, et deux domaines avec un sous-maillage qui est un raffinement moitié de l'autre. Ici a et ν sont constants égaux à 1, de façon à disposer de la solution exacte et mesurer la précision. Nous calculons l'erreur relative L^2 . Pour cela nous considérons 4 grilles initiales en temps :

- un maillage fin uniforme (maillage 1) de pas de temps $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 2.5/24$,
- un maillage non conforme (maillage 2) avec $\Delta t_1 = 2.5/24$ et $\Delta t_2 = 2.5/16$,
- un maillage non conforme (maillage 3) avec $\Delta t_1 = 2.5/16$ et $\Delta t_2 = 2.5/24$,
- un maillage grossier uniforme (maillage 4) avec $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 2.5/16$.

La Figure 5 représente l'erreur relative L^2 en fonction de Δt , en échelle logarithmique. A chaque raffinement, le pas de temps est divisé par deux. Nous constatons que l'erreur globale est encore d'ordre 1. Nous voyons d'autre part que les droites correspondant aux maillages non conformes (maillages 2 et 3) sont entre les deux droites représentant l'erreur pour les maillages conformes (maillages 1 et 4).

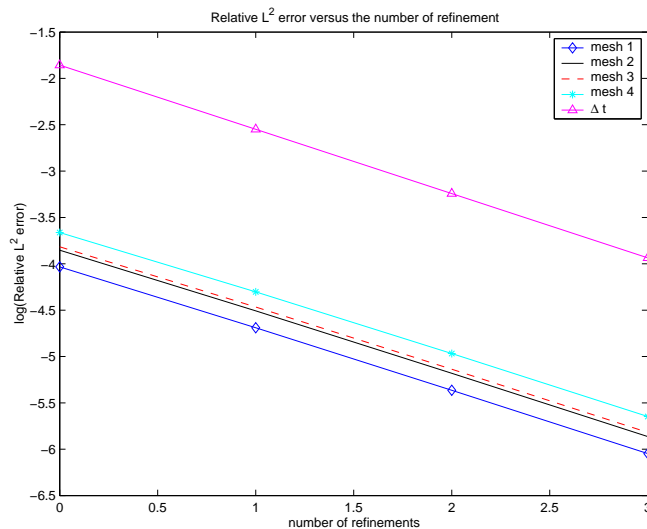


Figure 5: Erreur totale en fonction du pas de temps. maillage 1 (diamant), maillage 2 (ligne continue), maillage 3 (ligne pointillée), et maillage 4 (étoiles).

5 Travaux en cours. Perspectives

Nous avons ébauché en dimension 1 une méthode de raffinement de maillage dont nous avons établi les performances pour l'équation des ondes dans le cas du schéma saute-mouton. Ces performances reposent sur l'utilisation d'un algorithme de Schwarz global en temps et sans recouvrement, et d'une méthode de volumes finis, de façon à prendre bien en compte les conditions de transmission. Nous développons aujourd'hui ces méthodes dans plusieurs directions : les problèmes à coefficients très discontinus avec maillages non conformes en temps (voir [3] et [5] pour de premiers résultats), et la dimension 2 avec maillages non conformes en temps et en espace. D'autre part notre méthode souffre d'un inconvénient pour certaines applications : elle est implicite. Nous travaillons également à une version explicite de ces algorithmes dans le cadre du raffinement adaptatif de maillage (AMR).

Références

- [1] D. BENNEQUIN, M. GANDER & L. HALPERN, *Optimized Schwarz waveform relaxation for convection reaction diffusion problems*, Technical Report 24, LAGA, Université Paris 13, 2004.
- [2] M. BERGER, *Stability of interfaces with mesh refinement*, Math. of Comp. Vol 45, No 172 (1985), pp 301–318.
- [3] E. BLAYO, L. HALPERN & C. JAPHET, *Optimized Schwarz waveform relaxation algorithms with nonconforming time discretization for coupling convection-diffusion problems with discontinuous coefficients*, DD 16, janvier 2005.
- [4] F. COLLINO, T. FOUQUET, & P. JOLY, *Une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour le système de Maxwell 1-d*, C.R. Acad. Sci. Paris, 328 serie I (1999), pp 263–268.

- [5] M. GANDER, L. HALPERN & F. M. KERN, *Schwarz waveform relaxation method for advection–diffusion–reaction problems with discontinuous coefficients and non-matching grids*, DD 16, janvier 2005.
- [6] M. GANDER, L. HALPERN & F. NATAF, *Optimal Schwarz Waveform Relaxation for the one dimensional Wave Equation*, SIAM Journal on Num. Anal. Vol. 41, No 5 (2003), pp 1643-1681.
- [7] L. HALPERN, *Local space-time refinement for the one dimensional wave equation*, Journal of Computational Acoustics, vol.13, no.3 september 2005, pp 153-176.

Laurence HALPERN – halpern@math.univ-paris13.fr
Laboratoire Analyse Géométrie et Applications. Institut Galilée. Université Paris 13. 90 Av. J. B. Clément. 93430 Villetaneuse. France