Entropies d'Ordre Supérieur

Vincent GIOVANGIGLI, CMAP-CNRS

Mots-clés : entropie,cinétique,fluide

La notion d'entropie joue un rôle fondamental dans la modélisation des fluides d'un point de vue à la fois physique et mathématique [1, 2, 3, 5, 6, 7]. Nous introduisons dans cette étude une notion d'entropie d'ordre supérieur que nous utilisons ensuite pour estimer les solutions d'un modèle fluide [4].

Les entropies d'ordre supérieur sont des estimateurs d'entropie cinétique pour les modèles fluides. Ces quantités sont quadratiques en les dérivées de la vitesse v et la température T avec des coefficients dépendants de T [4].

Il faut noter que l'on ne considère donc les entropies d'ordre supérieur que comme des outils mathématiques d'estimation à priori des solutions d'un modèle fluide, c'est-à-dire d'un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux. Ce point de vue diffère notamment de ceux la thermodynamique étendue ou des modèles de type Burnet qui considèrent des équations aux dérivées partielles d'ordre plus élevés.

Par soucis de simplification, on ne considèra que la situation d'un fluide incompressible emplissant l'espace et 'constant à l'infini' avec une conductivité thermique λ et une viscosité η qui dépendent de la température T. On établit alors que les entropies d'ordre supérieur vérifient des inégalités de type entropique lorsque $\|\log T\|_{BMO} + \|v/\sqrt{T}\|_{L^\infty}$ est assez petit, pouvu que la dépendance de la conductivité thermique λ et de la viscosité η en la température T soit celle de la théorie cinétique, c'est-à-dire essentiellement de la forme $T^\varkappa$ avec $\varkappa \geq 1/2$.

Avec un théorème d'existence locale et des estimations entropiques d'ordre supérieur, on établit un théorème d'existence globale de solution lorsque les données initiales $\log(T_0/T_\infty)$ and $v_0/\sqrt{T_0}$ sont assez petites dans des espaces appropriés [4]. Il faut noter qu'une contrainte sur $\|\log T\|_{BMO} + \|v/\sqrt{T}\|_{L^\infty}$ peut également être interprétée heuristiquement comme une contrainte de faible nombre de Mach—ce qui est compatible avec le développement de Enskog [5]—car on a formellement dans cette situation $\log(T/T_\infty) = \mathcal{O}(\mathrm{Ma})$ et $v/\sqrt{T} = \mathcal{O}(\mathrm{Ma})$.

Références

[1] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Applied Mathematical Sciences, Volume 67, Springer-Verlag, 1988.

[2] J. H. Ferziger, H. G. Kaper, *Mathematical theory of transport processes in gases*, North-Holland, 1972.

[3] V. Giovangigli, *Multicomponent flow modeling*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[4] V. Giovangigli, *Higher Order Entropies*, Rapport Interne CMAP 592 (soumis pour publication), 2006.

[5] F. Golse, *From Kinetic to Macroscopic Models*, in : Kinetic Equations and Asymptotic Theory, B. Perthame and L. Desvillettes eds, Series in Applied Mathematics, Gauthier-Villars/Elseviers, 2000.

[6] S. Kawashima, *Systems of a Hyperbolic-Parabolic Composite Type, with applications to the equations of Magnetohydrodynamics*, Doctoral Thesis, Kyoto University, 1984.

[7] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volumes 1 and 2*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1996 et 1998.

Vincent GIOVANGIGLI – `vincent.giovangigli@polytechnique.edu`
CMAP, Ecole Polytechnique, 91128, Palaiseau cedex