Équation de transport non-locale modélisant la dynamique des dislocations

Mohamed-Amin GHORBEL, CERMICS, ENPC
Régis MONNEAU, CERMICS, ENPC

Mots-clés : Dynamique des dislocations, force de Peach-Koehler, équation de transport, équation non-locale, équation eikonal, solution de viscosité continue, estimation d'erreur.

Ce travail de recherche se concentre sur la dynamique de lignes de défauts cristallins appelées dislocations (cf. [3] et [4] pour une description physique). Ces dislocations se déplacent dans les matériaux sous l'action de contraintes élastiques. La dynamique de ces dislocations est à l'origine du comportement plastique des métaux cristallins (cf. [1] pour une modélisation de la dynamique des dislocations). On décrit la dynamique des dislocations à l'aide d'un modèle simple (cf. [2]). Il s'agit d'une équation de transport non-locale en dimension un d'espace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c[u](x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \text{in } \mathbb{R}\times(0,+\infty)\,, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Ces dislocations se déplacent à une vitesse $c[u]$ (appelée en physique force de Peach-Kohler résolue, cf. [4]) qui est la somme de deux termes. Elle sécrit

$$c[u](x,t) = c^{\text{ext}}(x) + \int_{\mathbb{R}} c^0(x-x')E(u(x',t))\,dx'\,. \tag{2}$$

où E est la fonction partie entière définie par

$$E(v) = k \quad \text{si } k \le v < k+1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Le premier terme c^{ext} représente les contraintes externes crées par les obstacles à l'avancement des dislocations (tels que les précipités dans le matériau, d'autres dislocations fixes ou bien d'autres défauts, ...). Le second terme c^{int} est non-local, donné par une convolution, et représente les contraintes internes élastiques crées par toutes les dislocations en mouvement. Ce dernier terme est obtenu par résolution des équations de l'élasticité linéaire et fait apparaître un noyau c^0 qui tient compte des effets élastiques (longue distance) des dislocations.
On présente un résultat d'existence et d'unicité de solutions de viscosité continues pour cette équation et une estimation d'erreur entre la solution continue et la solution discrète d'un schéma numérique de type différences-finies d'ordre un.

Références

[1] O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar, R. Monneau, *Dislocation dynamics: short time existence and uniqueness of the solution*, to appear in Arch. Ration. Mech. Anal., 2005.
[2] M.-A. Ghorbel, R. Monneau, *Well-posedness and numerical analysis of a one-dimensional non-local transport equation modelling dislocations dynamics*, submitted to J. Sci. Comput., 2006.
[3] J.R. Hirth, L. Lothe, *Theory of dislocations*, Second Edition, Malabar, Florida : Krieger, 1992.
[4] D. Rodney, Y. Le Bouar, A. Finel, *Phase field methods and dislocations*, Acta Materialia 51 (1), pp. 17-30, 2003.

Mohamed-Amin GHORBEL – ghorbel@cermics.enpc.fr
CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2
Régis MONNEAU – monneau@cermics.enpc.fr
CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2