

Un schéma de correction de pression inconditionnellement stable pour les équations de Navier-Stokes compressibles

Laura GASTALDO, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Cadarache

Fabrice BABIK, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Cadarache

Raphaèle HERBIN, LATP Marseille

Jean-Claude LATCHE, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Cadarache

Mots-clés : Navier-Stokes compressible, méthodes de correction de pression, faible nombre de Mach

Nous nous intéressons dans cette communication aux équations de Navier Stokes pour un écoulement barotrope, compressible et instationnaire. L'analyse du problème continu [1] repose sur les trois estimations *a priori* suivantes : la conservation de la masse, la stricte positivité de la masse volumique ρ dans tout le domaine, si cette propriété est respectée par la condition initiale, et une identité d'énergie qui garantit le contrôle, en fonction du second membre et des conditions initiales et aux limites du problème, de la quantité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho P(\rho) + \int_{\Omega} \tau(u) : \nabla u \quad (1)$$

où u désigne la vitesse, τ le tenseur de cisaillement et P le potentiel élastique. L'établissement de cette identité repose sur les deux égalités suivantes, obtenues en utilisant le bilan de masse:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho u^2 = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} u + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho u \otimes u) u \quad (2)$$

$$- \int_{\Omega} p \nabla \cdot u = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho P(\rho) \quad (3)$$

Nous développons ici un schéma à pas fractionnaire, de type correction de pression [2], qui satisfait les mêmes propriétés de stabilité. La discrétisation spatiale utilise une technique d'éléments finis mixtes non conformes (éléments finis de Crouzeix-Raviart ou Rannacher-Turek), associant des vitesses linéaires ou bilinéaires, discontinues aux faces des éléments, et une pression constante sur chaque maille ; l'intégrale du saut de vitesse sur chaque face est nulle.

La vérification de l'équation (2) nécessite le développement d'une discrétisation *ad hoc* de l'opérateur d'advection, par une technique de volumes finis basés sur un maillage dual (mailles diamant) ; le point central pour assurer la stabilité est d'utiliser, pour la discrétisation du terme instationnaire, une prédiction de ρ au temps t^{n+1} obtenue en résolvant le bilan de masse sur ces mêmes volumes de contrôle.

Du fait que les pressions sont constantes par maille, la discrétisation spatiale du terme de gradient de pression s'écrit sous la forme d'un bilan de type volume fini ; en s'appuyant sur cette caractéristique du schéma, nous démontrons qu'une discrétisation en volumes finis du bilan de masse, décentrée dans le sens de la vitesse, outre le fait qu'elle garantit la conservation de la masse et la positivité de la masse volumique, permet également de vérifier l'identité (3).

Comme la plupart des méthodes de correction de pression, le schéma garde les mêmes propriétés de convergence lorsque le nombre de Mach devient faible ; pour un écoulement incompressible, il dégénère en une méthode de projection incrémentale standard.

Cette méthode numérique est testée avec une solution manufacturée afin d'en vérifier la convergence ainsi que le bon comportement lorsque le nombre de Mach tend vers zéro.

Références

- [1] P. L. LIONS, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 2, Compressible Models*, Lecture Series in Mathematics and Its Applications, V. 3, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [2] HESTER BIJL AND PIETER WESSELING, *A Unified Method for Computing Incompressible and Compressible Flows in Boundary-Fitted Coordinates*, JCP 141, 153-173, 1998.

Laura GASTALDO – laura.gastaldo@irsn.fr
Fabrice BABIK – fabrice.babik@irsn.fr
IRSN, BP3 - 13115 St-Paul Lez Durance Cedex
Raphaèle HERBIN – herbin@cmi.univ-mrs.fr

LATP-CMI, 39 rue F. Curie, 13453 Marseille
Jean-Claude LATCHE – jean-claude.latche@irsn.fr
IRSN, BP3 - 13115 St-Paul Lez Durance Cedex