Bon comportement asymptotique en temps d'algorithmes pour les équations hyperboliques

Frédéric LAGOUTIÈRE, Université Denis Diderot, Paris-7

Mots-clés : équations hyperboliques, lois de conservation, entropies, schémas numériques, comportement asymptotique en temps

On considère la solution entropique d'un problème de loi de conservation

$$\begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}, \\ u(0,\cdot) = u^0 \in L^\infty(\mathbb{T}) \end{array} \tag{1}$$

et son approximation discrète en temps et en espace ($\mathbb{T}$ est le tore unité en dimension 1). Dans [2], on étudie un schéma numérique pour (1) de la forme

$$U^{n+1} = F(U^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $U^n = \left(u_j^n\right)_{j\in\{1,\dots,J\}} \in \mathbb{R}^J$, $J \in \mathbb{N}$, est le vecteur formé par les valeurs de la solution approchée à la $n$ième étape en temps dans les J mailles discrétisant $\mathbb{T}$. On y montre que U^n converge (lorsque n tend vers $+\infty$) vers $(\overline{u}, \dots, \overline{u})^T$, où $\overline{u}$ est la valeur moyenne des composantes du vecteur U^0, sous

- une hypothèse de décroissance globale en espace de toute entropie de Krushkov ;
- une hypothèse pouvant s'interpréter pour un schéma de volumes finis comme *le nombre de Courant n'est pas un entier.*

C'est la preuve d'un mauvais comportement asymptotique en temps, du moins en ce qui concerne les équations linéaires (ce résultat a été présenté au congrès SMAI 2005).
On s'intéresse ici à l'**importance des conditions suffisantes ci-dessus**.
1. On connaît des algorithmes non entropiques pour toute entropie de Krushkov bons en temps infini : voir par exemple le schéma décentré aval sous contraintes amont ou limiteur Ultrabee dans [3], ou le schéma à antidiffusion auto-adaptative de François Bouchut dans [1]. La condition d'entropie est donc nécessaire.
2. Il est connu que si le nombre de Courant est entier, ce résultat est faux : le schéma décentré amont pour l'équation d'advection linéaire, par exemple, est exact si le nombre de Courant vaut 1. Il apparaît donc que la condition sur le nombre de Courant est nécessaire.
3. La dernière condition importante est la *forme* du schéma : on a supposé qu'il s'écrivait $U^{n+1} = F(U^n)$. On élabore un algorithme d'un type nouveau, ne pouvant se mettre sous cette forme, qui est entropique pour toute entropie de Krushkov (pas seulement globalement mais même localement) et qui a un bon comportement en temps infini.

Références

[1] François Bouchut, *An antidiffusive entropy scheme for monotone scalar conservation laws*, Journal of Scientific Computing 21 (2004), no. 1, pp 1–30.

[2] Frédéric Lagoutière, *Large time behavior of numerical solutions of scalar conservation laws*, à paraître dans *Journal of Hyperbolic Differential Equations.*

[3] Bruno Després et Frédéric Lagoutière, *Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics*, Journal of Scientific Computing 16 (2002), no. 4, pp 479–524.

Frédéric LAGOUTIÈRE – `lagoutie@math.jussieu.fr`
Université Denis Diderot (Paris-7) et Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris