Méthodes de gradient multiniveau en optimisation de forme

François BEUX, Scuola Normale Superiore di Pisa

Mots-clés : approche multiniveau, optimisation de forme, méthode de gradient

1 Introduction

Dans cette étude, on s'intéresse à la résolution à l'aide de méthodes de type gradient de problèmes d'optimisation de forme en aérodynamique. Plus particulièrement, on considère le calcul d'un gradient discret, c'est à dire la différentiation est effectuée sur la formulation discrétisée du problème. Dans ce cadre, un choix naturel de paramétrisation consiste à considérer les coordonnées des points du maillage qui se trouvent sur la frontière à minimiser. En effet, on obtient alors un lien immédiat entre les variables de contrôle et la frontière discrétisée. Cependant un tel choix implique l'utilisation d'un grand nombre de paramètres de contrôle dès que la taille du problème considéré augmente. Ceci peut avoir un effet néfaste sur la convergence du processus d'optimisation; en effet, on observe généralement une dégradation du conditionnement du problème lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. D'autre part, on constate fréquemment l'apparition de hautes fréquences sur la forme en cours d'optimisation, qui se dissipent que très lentement ralentissant, de ce fait, ultérieurement la convergence (voir par exemple [2]). Ceci est du, en particulier, au problème plus général du manque de régularité de la dérivée d'une fonction par rapport au domaine (voir [8]). Le fait d'avoir des gradients discrets oscillatoires a conduit à la nécessité de définir des préconditionneurs afin de lisser le gradient [10, 11]. Dans [3], un autre type de préconditionnement est proposé afin de réduire la dépendance de la taille du problème pour la convergence. Cette approche, qui a également un effet de lissage pour la forme, consiste à utiliser alternativement différents ensembles de paramètres de contrôle, qui peuvent être reconduit de manière linéaire à la paramétrisation originale. S'inspirant des méthodes multigrilles et multiniveaux, utilisées pour l'accélération de la convergence des méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles, une stratégie multiniveau associée à une famille de paramétrisations emboitées est définie pour choisir sur quel niveau sera effectuée la minimisation pour chaque itération d'optimisation. Le bon comportement de l'approche ainsi définie, observée sur les résultats numériques obtenus dans [3], est également confirmer d'un point de vue théorique dans [9]. On notera qu'une approche multiniveau additive de complexité *a priori* inférieure, et, dans laquelle tous les niveaux sont balayés dans une seule itération d'optimisation, a été également introduite [7, 8].
D'autre part, alternativement aux coordonnées des points du maillage sur la frontière, une représentation polynomiale de la forme est souvent utilisée permettant d'avoir une description plus compacte avec un nombre réduit de paramètres de contrôle. In particulier, dans [4] une approche multiniveau est proposée considérant comme paramètres d'optimisation les coordonnées des points de contrôle de courbes de Bézier. Cependant, cette approche diffère sensiblement de la méthode définie dans [3] car elle est conçue pour être appliquée à n'importe quel type de méthodes d'optimisation, ne cherchant pas spécifiquement le maintien d'une direction de descente à chaque itération. Alternativement, dans cette étude, on se propose de généraliser l'approche multiniveau originale à d'autres types de paramétrisation tout en restant dans le contexte des méthodes de gradient.

2 Méthode de gradient et approche multiniveau

L'approche multiniveau définie dans [3] repose sur un changement d'espace de minimisation. Plus précisement, soient E et F deux espaces de Hilbert et $P : F \longrightarrow E$ linéaire, au lieu de minimiser directement la fonctionnelle j dans l'espace E des variables de contrôle, on applique un algorithme de gradient pour la minimisation de $j \circ P$ dans F. L'algorithme ainsi obtenu reste une méthode de descente dans l'espace E de départ. Cette idée est appliquée considérant comme variables d'optimisation les p coordonnées des points du maillage sur la frontière ($E = \mathbb{R}^{2p}$). Sans perte de généralité, dans le cas de l'optimisation de corps aérodynamiques (profils d'ailes ou de voiles, mais également pour le cas de la tuyère considéré dans cette étude), on peut également se limiter à considérer les ordonnées des points ($E = \mathbb{R}^{p}$), l'optimisation de la forme étant presque exclusivement due à des déplacements verticaux. Différents espaces F sont alors considérés, chacun d'entre eux étant associé à un sous-ensemble de points extraits de la paramétrisation complète. Pour chaque niveau l, on définit une application linéaire $P^{(l)} : F = I\!R^{n_l} \longrightarrow E = I\!R^p$ associée à la matrice $M^{(l)} \in I\!R^{p\times n_l}$ qui permet de prolonger les n_l paramètres sur le niveau plus fin. L'algorithme à l'itération r et correspondant à un niveau l est alors défini par:

$$\gamma_{r+1} = \gamma_r - \omega_r \, d^{(l)} d^{(l)} = M^{(l)}(M^{(l)})^T \, g_r \qquad \text{avec} \;\; \omega_r \in I\!R \text{ et } g_r \in I\!R^p \tag{1}$$

g_r étant le gradient de la fonctionnelle coût à l'itération r.
Cet algorithme peut être interprété comme une méthode de gradient préconditionné; en effet, la différentiation de la fonctionnelle coût est effectuée seulement considérant la paramétrisation complète, la minimisation sur les niveaux plus grossiers apparaissant uniquement à travers la matrice de préconditionnement $M^{(l)}(M^{(l)})^T \in I\!R^{p\times p}$. D'autre part, le choix du niveau à chaque itération d'optimisation est déterminé par une stratégie de changement de niveau similaire aux stratégies multigrilles et multiniveaux utilisées pour la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles (par exemple, cycles à V). Enfin, l'algorithme est totalement déterminé par le choix de $P^{(l)}$. Ce prolongement sur le niveau plus fin est effectuée par interpolation. Différentes interpolations ont été testées dans [3] fournissant des courbes de convergence sensiblement différentes l'une de l'autre. Finalement, une interpolation cubique de Hermite associée à un ensemble de paramétrisations emboitées (on double le nombre de points chaque fois que l'on augmente d'un niveau) a été retenue dans [3] et également utilisée dans des travaux successifs [6].

3 Généralisation de l'approche multiniveau à courbes de Bézier

Une courbe de Bézier de degré n peut être définie de façon paramétrique par:

$$S(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{q=0}^{n} B_n^q(t) S_q \qquad \text{avec} \;\; t \in [0,1] \tag{2}$$

où $S_q = (x_q, y_q)$ est le q-ième point de contrôle de Bézier tandis que $B_n^q(t)$ correspond au q-ième polynôme de Bernstein de degré n.
Les ordonnées des points du maillage sur la frontière, c.a.d. $\gamma = (y_0^\Gamma, \cdots, y_m^\Gamma)^T$, sont considérées ici comme variables d'optimisation. D'autre part, fixant $m+1$ paramètres t_k ($t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$) et utilisant la relation (2) avec $y(t_k) = y_k^\Gamma$ pour $k = 0, \cdots, m$, il apparaît que chaque variable d'optimisation s'exprime comme combinaison linéaire des ordonnées des points de contrôle de Bézier $\alpha = (y_0, \cdots, y_n)^T$.
De ce fait, il est donc possible de définir une stratégie similaire à l'approche multiniveau originale où, au lieu d'un sous-ensemble de points du maillage sur la frontière, les sous-paramétrisations sont constituées d'un ensemble de points de contrôle de Bézier utilisant l'application linéaire suivante comme opérateur de prolongement sur le niveau plus fin:

$$\begin{array}{rlcl} P: & I\!R^{n+1} & \longrightarrow & I\!R^{m+1} \\ & \alpha & \longmapsto & \gamma = P(\alpha) = M\alpha \qquad \text{où} \;\; M_{ij} = B_n^j(t_i). \end{array} \tag{3}$$

Suivant une stratégie similaire à l'approche multiniveau originale, on peut définir l'itération $r+1$ comme

$$\gamma_{r+1} = \gamma_r - \omega_r \, d_r^{(l)} \;\; \text{avec} \;\; \omega_r \in I\!R \text{ et } \gamma_r, \gamma_{r+1} \text{ et } d_r^{(l)} \in I\!R^{m+1} \tag{4}$$

où la direction de descente à l'itération r et au niveau l est définie par:

$$k = 0, \cdots, m \qquad \left(d_r^{(l)}\right)_k = \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\left[\sum_{q=0}^{n_l} B_{n_l}^q(t_k^{(l)}) B_{n_l}^q(t_j^{(l)})\right]}_{\left(M^{(l)}(M^{(l)})^T\right)_{kj}} (g_r)_j \tag{5}$$

Cependant, la définition des paramétrisations sur les différents niveaux est ici moins immédiate. En effet, les abscisses des points du maillage sur la frontière ($\{x_k^\Gamma\}_{k=0,m}$) étant fixées, il s'agit de définir pour chaque niveau, $X^{(l)} = (x_0^{(l)}, \cdots, x_{n_l}^{(l)})^T$ avec $n_l > n_{l-1}$ et $T^{(l)} = (t_0^{(l)}, \cdots, t_m^{(l)})^T$ de façon à ce que la relation (2) soit toujours vérifiée, c'est à dire:

$$x_k^\Gamma = x(t_k^{(l)}) = \sum_{q=0}^{n_l} B_{n_l}^q(t_k^{(l)}) x_q^{(l)} \;\; \text{pour} \;\; k = 0, \cdots, m \tag{6}$$

Supposons d'avoir déjà défini la paramétrisation du niveau plus grossier avec $X^{(0)}$ et $T^{(0)}$ compatibles, c'est à dire avec (6) vérifiée pour $k = 0$. Pour construire les paramétrisations sur les autres niveaux, on utilise ici la propriété classique d'élévation de degré qui permet d'augmenter le degré et le nombre de points de contrôle des courbes de Bézier sans changer pour autant la répartition des paramètres t. On peut alors, d'une part, considérer les $\{t_k\}_{k=0,m}$ indépendents du niveau l, c'est à dire prendre $t_k^{(l)} = t_k^{(0)} \equiv t_k$ pour $k = 0, \cdots, m$ et $l > 0$, et d'autre part, construire $X^{(l)}$ pour $l > 0$ appliquant successivement l'algorithme d'élévation de degré jusqu'à obtenir $n_l + 1$ abscisses.

On notera que dans [4], où les ordonnées des points de contrôle de Bézier sont utilisées comme variables d'optimisation, l'algorithme d'élévation de degré est directement utilisé pour le changement de niveau. D'autre part, dans [5], une procédure d'adaptation dynamique de la paramétrisation est proposée afin d'avoir une meilleure répartition des abscisses, et de ce fait, améliorer les performances de l'algorithme. On se contentera, ici, de définir une bonne répartition initiale des abscisses, la procédure adaptative ne permettant pas de maintenir la linéarité nécessaire à l'obtention d'une direction de descente à chaque itération.

Une première validation de la nouvelle formulation est proposée pour un problème inverse dans le cadre d'un écoulement bi-dimensionnel subsonique non visqueux dans une tuyère [1] (l'écoulement est modélisé par le système des équations d'Euler). La stratégie multiniveau est utilisée soit avec le calcul exact du gradient discret que considérant un gradient approché associé à une approche "one-shot" similaire à celle utilisée dans [6].

Références

[1] F. Beux, *Shape optimization of an Euler flow in a nozzle*, "Notes on Numerical Fluid Mechanics, **55**, Périaux et al. eds, Vieweg Publishing, 115-131, 1994.

[2] F. Beux et A. Dervieux, *Exact-gradient shape optimization of a 2-D Euler flow*, Finite Elements in Analysis and Design, **12**/ 3-4, 281-302, 1992.

[3] F. Beux et A. Dervieux, *A hierarchical approach for shape optimization*, Engineering Computations, **11**, 25-48, 1994.

[4] J.-A. Désidéri, *Hierarchical optimum-shape algorithms using embedded Bézier parameterizations*, Numerical Methods for Scientific Computing, Variational Problems and Applications, Y. Kuznetsov *et al* eds., CIMNE, Barcelona, 2003.

[5] B. Abou El Majd, J.-A. Désidéri et A. Janka, *Nested and self-adaptive Bezier parameterization for shape optimization*, International Conference on Control, Partial Differential Equations and Scientific Computing, Beijing, China, 13-16 Sept, 2004.

[6] C. Held et A. Dervieux, *One-shot airfoil optimisation without adjoint*, Computers and Fluids, **31**/8, 1015-1049, 2002.

[7] B. Koobus, N. Marco et A. Dervieux, *An additive multilevel preconditioning method*, Journal of Scientific Computing, **12**/3, 233-251, 1997.

[8] F. Courty, *Optimisation différentiable en mécanique des fluides numérique*, thèse de doctorat en Sciences spécialité E.D.P. et Calcul Scientifique, Université Paris-Sud, 2003.

[9] H. Guillard, *Convergence analysis of a multi-level relaxation method*, rapport de recherche INRIA n^o RR-1884, 1993.

[10] B. Mohammadi et O. Pironneau, *Applied Shape Optimization for Fluids*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University press, 2001.

[11] J. Reuther et A. Jameson, *Aerodynamic shape optimization of wing and wing-body configurations using control theory*, AIAA Paper, 95-0123, 1995.

François BEUX – `fbeux@sns.it`

Scuola Normale Superiore di Pisa, Piazza dei Cavalieri, 7 - 56126 Pisa (Italie)