Existence et localisation de solutions pour le système de Ginzburg-Landau

Pierre DEL CASTILLO, Université de Picardie Jules Verne

En supraconductivité, les états d'un matériel soumis à un champ magnétique extérieur sont décrits par les minima d'une fonctionnelle introduite par Ginzburg-Landau [1]. Dans le cas particulier d'un film d'épaisseur d, des simplications physiques conduisent à l'étude d'une fonctionnelle, dont l'expression est donnée par

$$\varepsilon_d(f,A;h) \;=\; \int_0^d [\frac{1}{2}f(x)^4 - f(x)^2 + \kappa^{-2}f'(x)^2 + f(x)^2A(x)^2 + (A'(x)-h)^2]\,dx,$$

pour des paires (f,A) de $\big(H^1([0,d])\big)^2$ telles que $A(d)=0$. La fonction f représente le paramètre d'ordre qui caractérise les états de l'échantillon, A est le potentiel magnétique. Le réel positif h est proportionnel à l'intensité du champ magnétique extérieur et κ est le paramètre de Ginzburg-Landau reflétant les propriétés du matériel. Un minimum local de la fonctionnelle ε_d satisfait une équation d'Euler appelée dans ce contexte système de Ginzburg-Landau et donnée par

$$(GL)_d \quad \begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + f\,A^2 & = 0 \;\text{ on }\;]0,d[, \\ -A'' + Af^2 & = 0 \;\text{ on }\;]0,d[, \\ f'(0)=0,\;\; f'(d)=0,\;\; A'(0)=h,\;\; A(d)=0. & \end{cases}$$

Inspiré par [2] et [4], nous construisons des sous-solutions et sur-solutions de $(GL)_d$ dans la limite κ faible. Nous en déduisons une localisation de solutions de $(GL)_d$ satisfaisant la condition de de Gennes $\kappa h^2 \sim \sqrt{2}f(0)^2(1-f(0)^2)$ où $\frac{1}{\sqrt{2}} < f(0) < 1$. Une étude numérique menée dans [5] montre que ces solutions sont stables, c'est-à-dire sont des minimas locaux de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.
Par ailleurs, S. Hastings, M.K. Kwong et W.C. Troy ont montré dans [3] que pour tout $\kappa > 0$, il existe $d_0 > 0$ tels que pour $\kappa d \geq d_0$, il existe des valeurs de h pour lesquelles $(GL)_d$ admet au moins deux solutions satisfaisant la condition $A'(0) = h$.
Par une approche variationnelle, nous déduisons de ce résultat l'existence de solutions non-minimisantes de $(GL)_d$ pour tout $\kappa > 0$. Pour prouver l'existence de ces solutions, nous considérons la restriction de la fonctionnnelle ε_d à un convexe fermé de la forme $C_\alpha = \{(f,A) \in H^1([0,d])^2,\ \text{tel que}\ \ f \geq \alpha > 0,\ A(d) = 0\}$, où α est choisi de manière convenable. Nous montrons que la restriction de ε_d à C_α est semi-bornée inférieurement, puis nous prouvons que ε_d admet deux minima locaux dans C_α, d'énergie différente. Nous montrons également que la fonctionnelle vérifie la condition de Palais-Smale sur C_α. Appliquant une variante du lemme du col, nous concluons qu'il existe un point critique (f,A) appartenant à C_α qui ne minimise pas l'énergie ε_d.

Références

[1] V.L. Ginzburg & L.D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., 1064-1082, 1950.

[2] C. Bolley & B. Helffer, *Global superheating field for superconductors in a large bounded interval*, Physica D. 172 162-189, 2002.

[3] S. Hastings, M.K. Kwong & W.C. Troy, *The existence of multiple solutions for a Ginzburg-Landau type model of superconductivity*, Eur. J. Appl. Math. Vol. 7 559-574, 1996.

[4] P. del Castillo, *Lower bound for the superheating field in a semi-infinite film in the weak-κ limit: the general case*, J. Math. Phys. Vol. 44 2416-2450, 2003.

[5] P. del Castillo & S. Mefire, *Some aspects of the one-dimensional Ginzburg-Landau system in the weak-κ limit and numerical study of the stability of solutions*, Far East J. Appl. Math., Vol. 19 81-123, 2005.

Pierre DEL CASTILLO – `pierre.delcastillo@u-picardie.fr`
Université de Picardie Jules Verne, Laboratoire Amiénois de mathématiques fondamentales et appliquées, CNRS UMR 6140, 33 r. Saint-Leu, 80039 Amiens cedex 1