Correction multi-échelle pour des perturbations singulières du bord

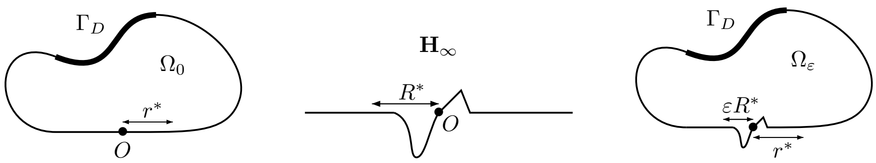
Marc DAMBRINE, LMAC, UTC Compiègne

Grégory VIAL, IRMAR, Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan

Mots-clés : développement asymptotique deux échelles, perturbation singulière de la géométrie.

Nous considérons une équation aux dérivées partielles elliptique posée dans un domaine dont le bord est localement perburbé. La perturbation considérée est l'homothétique à une échelle ε d'un motif. Nous ne supposons ni que le domaine perturbé est inclus dans le domaine de référence, ni l'inverse. Dans la géométrie illustrée par la figure suivante, nous considérons le problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_\varepsilon & = & f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \backslash \Gamma_D. \end{array} \right. \tag{1}$$



Nous pouvons alors décrire entièrement la solution u_ε de (1) à partir de la solution u_0 du même problème posé dans la géométrie de référence Ω_0. Si $f \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, alors u_ε admet le développement asymptotique suivant pour $N < K$

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i V_n^i(\tfrac{x}{\varepsilon}) + \zeta(\tfrac{x}{\varepsilon}) \sum_{i=2}^{N} \varepsilon^i w^i(x) + \mathcal{O}_{\mathrm{H}^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^N), \tag{2}$$

où $\tilde{u}_0$ et les profils V_n^i sont définis à l'aide du développement de Taylor à l'ordre K de u_0. Les profils sont les pendants du $i^{\text{ème}}$ terme u^i, et w^i sont des correcteurs engendrés par les troncatures. Nous obtenons des résultats similaires à ceux de [1],[2]. Numériquement, nous nous servons de ce développement en approchant u_ε par $u_0 + \varepsilon\chi V_n^1(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ c'est-à-dire en tronquant à l'ordre un. Il convient pour cela de calculer le premier profil V_n^1 solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta V_n^1 & = & 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_{\mathbf{n}} V_n^1 & = & -|\nabla u_0(0)| N_1 & \text{sur } \partial\mathbf{H}_\infty, \\ V_n^1 & \to & 0 & \text{à l'infini}, \end{array} \right. \tag{3}$$

posée dans un domaine infini avec un bord infini puis de superposer sur un patch d'éléments les deux fonctions. Cette méthode évite l'usage d'un maillage adapté (et donc raffiné) autour de la perturbation du domaine et requiert ainsi significativement moins de degrés de liberté. Nous présentons divers résultats numériques qui illustrent le développement asymptotique (2).

Références

[1] M. Dambrine and G. Vial, *On the influence of a boundary perturbation on the Dirichlet energy* Control and Cybernetics, vol. 34, n. 1 (2005).

[2] S. Tordeux and G. Vial, *Matching of asymptotic expansions and Multiscale expansion for the Rounded Corner Problem* SAM Research Report, ETH, Zürich (2006).

Marc DAMBRINE – `marc.dambrine@utc.fr`
LMAC, Université de Technologie de Compiègne
Grégory VIAL – `gregory.vial@bretagne.ens-cachan.fr`
IRMAR, Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan