

# Couplage Raman-Landau pour l'interaction laser-plasma

Mathieu COLIN, Université Bordeaux 1 et INRIA Futurs

Radoin BELAOUAR, Université Bordeaux 1 et CEA CESTA

Thierry COLIN, Université Bordeaux 1 et INRIA Futurs

Gérard GALLICE, CEA CESTA

Cédric GALUSINSKI, Université Bordeaux 1 et INRIA Futurs

## 1 Introduction et position du problème

La fabrication de lasers de puissance permet d'atteindre des régimes d'interaction laser-plasma jusque là hors de portée dans des conditions de laboratoire. Afin d'interpréter les expériences ou de dimensionner les installations on a recours à la simulation numérique. Ce travail se place dans le cadre des problèmes de simulation autour du laser méga-joule en construction au CEA CESTA. La problématique globale est la reproduction en laboratoire de la fusion thermonucléaire par confinement inertiel. Une bille contenant un mélange de deutérium et de tritium est placée dans une boîte contenant un gaz neutre et un ensemble de faisceaux lasers est focalisé sur cette boîte. Les lasers ionisent le gaz et un plasma se forme qui rétroagit sur les faisceaux. Un des défis numériques est de simuler cette interaction afin de mieux contrôler le dépôt d'énergie sur la cible [4].

Les ordres de grandeur en jeu sont les suivants: l'impulsion laser dure environ  $10^{-8}s$ , c'est-à-dire que c'est un trait de lumière de  $3m$ . La longueur d'onde du laser est de l'ordre du micromètre donc la pulsation de l'ordre de  $10^{15}s^{-1}$ . La boîte mesure quelques centimètres et on dépose une énergie de l'ordre du méga-joule. Un modèle de type Vlasov-Maxwell est susceptible de tenir compte de tous les phénomènes pertinents dans cette situation. Néanmoins, cela nécessite de mailler à l'échelle de la longueur d'onde en espace et à l'échelle de l'inverse de la fréquence temps. Il n'est alors tout simplement pas possible actuellement (et pendant encore longtemps!) d'effectuer une simulation dans des conditions physiquement réalistes. On veut alors utiliser des modèles simplifiés à base d'approximations d'enveloppe comme le sont les équations de Zakharov [16].

Il n'est évidemment pas possible d'avoir toute la richesse d'une description cinétique. Néanmoins nous aimerions montrer dans ce travail comment prendre en compte l'instabilité Raman et l'amortissement Landau et proposer un couplage de ces deux phénomènes.

## 2 L'instabilité Raman.

### 2.1 Les ondes en présence

Si on part d'une description du plasma sous forme fluide, on peut utiliser pour sa description le système d'Euler-Maxwell. On utilise un système d'Euler compressible isentropique pour les ions, un pour les électrons plus Maxwell. Le couplage se fait via les termes de forces de Coulomb et de Lorentz (dans Euler) et via le terme de courant dans Maxwell [5].

Afin d'identifier les différents types d'ondes se propageant dans un tel système, on effectue une linéarisation autour de zéro (exceptée la densité qui est linéarisée autour d'une valeur constante). On met en évidence alors trois types d'ondes:

i) Le premier type est formée d'ondes électromagnétiques vérifiant une équation de type Klein-Gordon:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta + \omega_{pe}^2\right) E = 0$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\omega_{pe}$  est la pulsation plasmaélectronique. La relation de dispersion de ces ondes est

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$$

et elles sont transverses au sens où le champ électrique est orthogonal au vecteur d'onde.

ii) Le second type d'onde est formé d'onde plasma électroniques qui vérifient aussi une équation de type Klein-Gordon:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_{th}^2 \Delta + \omega_{pe}^2\right) E = 0$$

où  $v_{th}$  est la vitesse thermique des électrons. La relation de dispersion de ces ondes est

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 k^2$$

et elles sont longitudinales au sens où le champ électrique est parallèle au vecteur d'onde. On note également que  $v_{th}^2$  est plus petit que  $c^2$  d'au moins un rapport 100 si bien que la dispersion naturelle de ce type d'ondes est très différente de celle des ondes électromagnétiques.

iii) Le dernier type d'ondes est les ondes acoustiques ioniques qui se propagent à la vitesse du son associée aux ions  $c_s$  qui est également très petite par rapport à  $v_{th}$ .

Le scénario attendu est alors le suivant: il y a deux ondes électromagnétiques en présence: l'onde laser et l'onde Raman (qui est en générale rétrodiffusée). Ces deux ondes interagissent et créent alors une onde plasma-électronique. Ces trois ondes sont à l'origine de la création des ondes acoustiques ioniques qui rétro-agissent sur les trois premières ondes.

## 2.2 Le système non linéaire

Une théorie de type "analyse faiblement non-linéaire" permet d'obtenir un système couplé qui peut s'écrire sous forme sans dimension:

$$(i(\partial_t + v_C \partial_y) + \alpha_1 \partial_y^2 + \alpha_2 \Delta_\perp) A_C = \frac{b^2}{2} p A_C - (\nabla \cdot E) A_R e^{-i\theta}, \quad (1)$$

$$(i(\partial_t + v_R \partial_y) + \beta_1 \partial_y^2 + \beta_2 \Delta_\perp) A_R = \frac{bc}{2} p A_R - (\nabla \cdot E^*) A_C e^{i\theta}, \quad (2)$$

$$(i\partial_t + \gamma \nabla \nabla \cdot - \delta \nabla \times \nabla \times) E = \frac{b}{2} p E + \nabla (A_R^* \cdot A_C e^{i\theta}), \quad (3)$$

$$(\partial_t^2 - v_s^2 \Delta) p = a \Delta (|E|^2 + b|A_C|^2 + d|A_R|^2). \quad (4)$$

Ici la direction du laser est  $y$ . Les directions transverses sont  $x$  et  $z$ . On a noté  $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_z^2$ . Les constantes dans le système (1) – (4) sont données ci-dessous et les coefficients de dispersion sont

$$\alpha_1 = \frac{c_0^2 k_0^2 \omega_{pe}^2}{2\omega_0^4}, \quad \alpha_2 = \frac{c_0^2 k_0^2}{2\omega_0^2}, \quad \beta_1 = \frac{c_0^2 k_0^2 \omega_{pe}^2}{2\omega_R^3 \omega_0}, \quad \beta_2 = \frac{c_0^2 k_0^2}{2\omega_R \omega_0}, \quad \gamma = \frac{v_{th}^2 k_0^2}{2\omega_{pe} \omega_0}, \quad \delta = \frac{c_0^2 k_0^2}{2\omega_{pe} \omega_0}, \quad v_s = \frac{c_s k_0}{\omega_0},$$

Les vitesses de groupes  $v_C$  et  $v_R$  sont données par

$$v_C = \frac{k_0^2 c_0^2}{\omega_0^2}, \quad v_R = \frac{k_R k_0 c_0^2}{\omega_R \omega_0}.$$

Les coefficients des nonlinéarités sont:

$$a = 4 \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_0 \omega_R}{\omega_{pe}^2}, \quad b = \frac{\omega_{pe}}{\omega_0}, \quad d = \frac{\omega_{pe}}{\omega_R},$$

où  $m_e$  et  $m_i$  sont respectivement les masses des électrons et des ions.

La pulsation du laser est  $\omega_0$  et  $k_0$  le nombre d'onde correspondant. Ils satisfont la relation de dispersion des ondes électromagnétiques:

$$\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + k_0^2 c^2, \quad (5)$$

La pulsation de l'onde Raman est  $\omega_R$  et  $k_R$  est le nombre d'onde. Ils vérifient la même relation de dispersion que (5) :

$$\omega_R^2 = \omega_{pe}^2 + k_R^2 c^2. \quad (6)$$

De plus,

$$\theta = \frac{k_1}{k_0} y - \frac{\omega_1}{\omega_0} t,$$

et  $k_1, \omega_1$  vérifient

$$k_0 = k_R + k_1, \quad (7)$$

$$\omega_0 = \omega_R + \omega_{pe} + \omega_1. \quad (8)$$

Ce système décrit une interaction à trois ondes et la condition de résonance est que la troisième onde ( $\omega_{pe} + \omega_1, k_1$ ) vérifie la relation de dispersion des ondes plasmas électroniques:

$$(\omega_{pe} + \omega_1)^2 = \omega_{pe}^2 + v_{th}^2 k_1^2, \quad (9)$$

Dans la pratique  $\omega_1 \ll \omega_{pe}$ . Un calcul direct donne alors

$$\omega_1 \approx \frac{v_{th}^2 k_1^2}{2\omega_{pe}},$$

soit

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} \approx \frac{v_{th}^2 k_0^2}{2\omega_{pe}\omega_0} \left(\frac{k_1}{\omega_0}\right)^2 = \gamma \left(\frac{k_1}{\omega_0}\right)^2.$$

ce qui signifie précisément que  $e^{i\theta}$  est résonnant pour l'opérateur de Schrödinger  $i\partial_t + \gamma\nabla\nabla$ .

### 2.3 Le problème de Cauchy et la discrétisation

La partie non dispersive du système (1) – (4) :

$$i\partial_t A_C = -\nabla \cdot EA_R,$$

$$i\partial_t A_R = -\nabla \cdot E^* A_C$$

$$i\partial_t E = \nabla(A_R^* \cdot A_C),$$

n'est **pas** hyperbolique si bien que (1) – (4) est localement bien posé dans des espaces de fonctions régulières que grâce à la dispersion [5].

De plus, la quantité

$$\int 2|A_C|^2 + |A_R|^2 + |E|^2$$

est conservée au cours du temps.

Le traitement numérique de ce type de systèmes dans la littérature physique se fait presque toujours par des méthodes spectrales couplées à des splitting en temps avec des conditions aux limites périodiques, voir [12] par exemple. Afin de traiter des problèmes aux limites, nous proposons une discrétisation de type différences finies associant le schéma de Glassey [10] pour la partie Zakharov tandis que la partie quasi-linéaire non hyperbolique est traitée par la méthode de Ch. Besse [1]. On dispose alors d'une méthode semi-implicite conservant la quantité  $\int 2|A_C|^2 + |A_R|^2 + |E|^2$ , voir [6]. Un résultat numérique typique est le suivant: on part d'une impulsion laser  $A_C$  localisée et on prend comme donnée initiale sur  $A_R$  et  $E$  1% de  $A_C$ . Comme la figure 1 le montre, ces deux derniers champs augmentent en amplitude puis  $A_R$  se propage à la vitesse de groupe,  $E$  reste sur place (vitesse de groupe nulle). Le processus d'amplification s'arrête lorsque les supports sont disjoints.

## 3 L'amortissement Landau

L'amortissement Landau est un phénomène d'échange d'énergie ondes-particules. Les ondes plasma électroniques échangent de l'énergie avec les électrons qui se trouvent accélérés. Dans la situation expérimentale considérée, ces électrons chauds peuvent induire un préchauffage de la cible qui en réduit le rendement. Il s'agit d'un processus de nature cinétique qui n'est pas décrit par le modèle précédent. Nous allons dans cette partie introduire cet amortissement en dimension 1 d'espace.

### 3.1 Le système de Zakharov modifié

On part du système de Zakharov qui décrit l'interaction des ondes plasmas électroniques (haute fréquence) avec les ondes ioniques acoustiques. Ce système couple l'enveloppe lentement variable  $E$  du champ électrique avec la variation  $n$  de la densité des ions par rapport à l'état d'équilibre de densité constante. Sous forme adimensionné, il s'écrit en dimension 1 d'espace,

$$\begin{aligned} i\partial_t E + \partial_x^2 E &= nE \\ \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 n - \partial_x^2 n &= \partial_x^2 (|E|^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Physiquement, ces ondes n'existent pas par elles-mêmes et sont créés par une onde pompe de la forme

$$E_p(x) \exp(i(k_p x - \omega t)) \text{ avec } |\partial_x E_p| \ll k_p E_p,$$

et  $\omega = -k_p^2$  qui est donc résonnante avec la première équation de (10). Cette onde pompe est obtenue par effet Raman (cf le paragraphe précédent). Le système (10) devient,

$$\begin{aligned} i\partial_t E + \partial_x^2 E &= nE + E_p(x) \exp(i(k_p x - \omega t)) \\ \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 n - \partial_x^2 n &= \partial_x^2 (|E|^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Ce système (11) ne décrit pas les effets cinétiques dûs à des déséquilibres thermodynamiques par les électrons.

Une façon de remédier à cela est d'introduire un couplage entre  $(E, n)$  et  $F_e(t, v)$  (la moyenne spatiale de la distribution en vitesse des électrons). La vitesse des électrons est reliée à leur phases et après adimensionnement on a  $v = k^{-1}$  où  $k$  est la variable de Fourier duale de  $x$ . Ce couplage s'écrit [13]

$$\begin{aligned} i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E &= nE + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)), \\ \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 n - \partial_x^2 n &= \partial_x^2 (|E|^2), \\ \partial_t F_e - \partial_v \left( \frac{1}{|v|} |\hat{E}(\frac{1}{v}, t)|^2 \partial_v F_e \right) &= 0, \\ \hat{\nu}_e(k, \cdot) &= -\frac{1}{k|k|} \partial_v F_e(\frac{1}{k}, \cdot). \end{aligned} \quad (12)$$

où  $F_{e0}(\cdot)$  est une Gaussienne,  $|\hat{E}(k, t)|$  est la transformée de Fourier de  $x \rightarrow E(x, t)$ .

Il est plus commode d'écrire ce système en utilisant la variable  $k$  plutôt que  $v$  et on pose

$$H_e(k, t) = F_e(v, t).$$

On obtient alors le système

$$\begin{aligned} i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E &= nE + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)), \\ \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 n - \partial_x^2 n &= \partial_x^2 (|E|^2), \\ \partial_t H_e - k^2 \partial_k (|k|^3 |\hat{E}(k, t)|^2 \partial_k H_e) + H_e - H_{e0} &= 0, \\ \hat{\nu}_e(k, \cdot) &= \text{sgn}(k) \partial_k H_e(k, \cdot). \end{aligned} \quad (13)$$

Il reste à déterminer sur quels domaines ces équations sont vérifiées.

Usuellement, les deux premières équations de (13) sont supposées être vérifiées sur l'espace entier, ici  $\mathbf{R}$ . En revanche la troisième et quatrième ne sont vérifiées que pour des vitesses bornées et également loin de zéro,

$$v \in [-A, -a] \cup [a, A], \quad (A > a > 0),$$

ce qui donne un domaine en fréquence de la forme,

$$k \in \Omega = [-a^{-1}, -A^{-1}] \cup [A^{-1}, a^{-1}], \quad (A > a > 0).$$

En dehors de ce domaine, on prend

$$\hat{\nu}_e(k, \cdot) = 0.$$

Le système que nous étudions est alors,

$$\begin{aligned} i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E &= nE + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \\ \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 n - \partial_x^2 n &= \partial_x^2 (|E|^2), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \partial_t H_e - k^2 \partial_k (|k|^3 |\hat{E}(k, t)|^2 \partial_k H_e) + H_e - H_{e0} &= 0, \quad k \in \Omega, t \geq 0 \\ \hat{\nu}_e(k, \cdot) &= 1_\Omega \operatorname{sgn}(k) \partial_k H_e(k, \cdot). \end{aligned} \quad (15)$$

Les conditions aux limites sont

$$\partial_k H_e|_{\partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Le problème de Cauchy avec  $\nu_e = 0$  est maintenant bien compris (même en dimension 2 et 3) [14], [15], [11], [3], [7], [8], [9].

On ne sait pas faire le cas général  $\nu_e \neq 0$ . Nous allons nous restreindre au cas  $c_s = +\infty$  et les deux équations (14) deviennent

$$i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E = |E|^2 E + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0. \quad (17)$$

On doit alors résoudre (17), (15) et (16).

On peut montrer qu'il existe des solutions faibles à ce système [2] et que si  $\hat{\nu}_e$  est positif à l'instant initial, il le reste pour tout temps.

### 3.2 La discrétisation

La difficulté présentée par le système est que la partie "Zakharov" est posé dans l'espace physique, tandis que la partie diffusion est dans l'espace de Fourier. On met donc en place un splitting en temps avec une description en spectrale de la partie Zakharov ( $E, n$ ). On utilise alors des différences finies en  $t$  et  $\xi$  pour la partie diffusion. Une forme particulière de la discrétisation du coefficient de diffusion est introduite afin d'assurer la conservation de l'énergie. Un résultat typique est présenté figure 2.

## 4 Le couplage Raman-Landau en 1 D

Il "suffit" de rajouter un terme  $i\nu_e \star E$  dans l'équation sur  $E$  du système (1) – (4) où  $\nu_e$  est construit comme dans la section précédente.

On est très loin de pouvoir démontrer un théorème d'existence pour ce système. D'un point de vue numérique, il y a trois difficultés:

- i) **Le couplage.** Certaines équations doivent être traité par du Fourier, d'autre en différences finies.
- ii) **Les conditions aux limites.** On a besoin sur les champs  $A_C$  et  $A_R$  de conditions de type "transparentes" afin de limiter les réflexions au bord ainsi que les retours dûs à de la périodicité.
- iii) **L'accord de phase.** La condition de résonance à trois ondes doit être parfaitement vérifiée d'un point de vue numérique afin de ne pas sous-estimer l'anortissement Landau.

Nous proposerons dans l'exposé des stratégies pour surmonter ces trois difficultés.

### Références

- [1] C. BESSE, *Schéma de relaxation pour l'équation de Schrödinger non linéaire et les systèmes de Davey et Stewartson*, C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math., 326 (1998) 1427-1432.
- [2] R. BELAOUAR, T. COLIN, G. GALLICE, C. GALUSINSKI, *Theoretical and numerical study of a quasilinear Zakharov system describing Landau damping*, preprint.

- [3] J. BOURGAIN, *On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system.* Duke Math. J., Vol. 76 (1), (1994), 175-202.
- [4] *La ligne d'intégration laser*, CHOCS, Revue scientifique et technique de la direction des applications militaires, No 29, avril 2004.
- [5] M. COLIN, T. COLIN, *On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions*, Differential Integral Equations 17, no. 3-4, 297-330 (2004).
- [6] M. COLIN AND T. COLIN, *A numerical model for the Raman amplification for laser plasma interaction*, à paraître à Journ. Comp. Applied Math.
- [7] J. GINIBRE, Y. TSUTSUMI ET G. VELO, *On the Cauchy problem for the Zakharov system.* J. Funct. Anal., Vol. 151, (1997), 384-436.
- [8] L. GLANGETAS ET F. MERLE, *Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two. I.* Comm. Math. Phys., Vol. 160 (1), (1994), 173-215.
- [9] L. GLANGETAS ET F. MERLE, *Concentration properties of blow up solutions and instability results for Zakharov equation in dimension two. II* Comm. Math. Phys., Vol. 160 (2), (1994), 349-389.
- [10] R.T. GLASSEY, *Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equation in one space dimension*, Math. of Comput 58 197 (1992) 83-102.
- [11] T. OZAWA ET Y. TSUTSUMI, *Existence and smoothing effect of solution for the Zakharov equations.* Publ. Res. Inst. Math. Sci, Vol. 28 (3), (1992), 329-361.
- [12] D.A. RUSSEL, D.F. DUBOIS AND H.A. ROSE, *Nonlinear saturation of simulated Raman scattering in laser hot spots*, Physics of Plasmas 6 (4), (1999), 1294-1317.
- [13] K. Y. SANBONMATSU, *Competition between Langmuir wave-wave and wave-particle interaction in the auroral ionosphere.*, thesis of university of colorado (1997).
- [14] C. SULEM ET P-L. SULEM, *The nonlinear Schrödinger Equation. Self-Focusing and Wave Collapse*, Applied Mathematical Sciences 139, Springer, (1999).
- [15] C. SULEM ET P-L. SULEM, *Quelques résultats de régularité pour les équations de la turbulence de Langmuir.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, Vol. 289 (3), (1979), 173-176.
- [16] ZAKHAROV, V.E., MUSER, S.L., RUBENCHIK, A.M., *Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena*, Phys. Reports, Vol. 129, 285-366 , (1985).

Mathieu COLIN – [mcolin@math.u-bordeaux1.fr](mailto:mcolin@math.u-bordeaux1.fr)

MAB, Université Bordeaux 1, CNRS UMR 5466 et INRIA Futurs, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex

Radoïn BELAOUAR – [Radoin.Belaouar@math.u-bordeaux1.fr](mailto:Radoin.Belaouar@math.u-bordeaux1.fr)

MAB, Université Bordeaux 1, CNRS UMR 5466 et CEA CESTA, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex

Thierry COLIN – [colin@math.u-bordeaux1.fr](mailto:colin@math.u-bordeaux1.fr)

MAB, Université Bordeaux 1, CNRS UMR 5466 et INRIA Futurs, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex

Gérard GALLICE – [gerard.gallice@cea.fr](mailto:gerard.gallice@cea.fr)

DEV/SIS, CEA CESTA, BP2, 33114 Le Barp

Cédric GALUSINSKI – [galusin@math.u-bordeaux1.fr](mailto:galusin@math.u-bordeaux1.fr)

MAB, Université Bordeaux 1, CNRS UMR 5466 et INRIA Futurs, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex

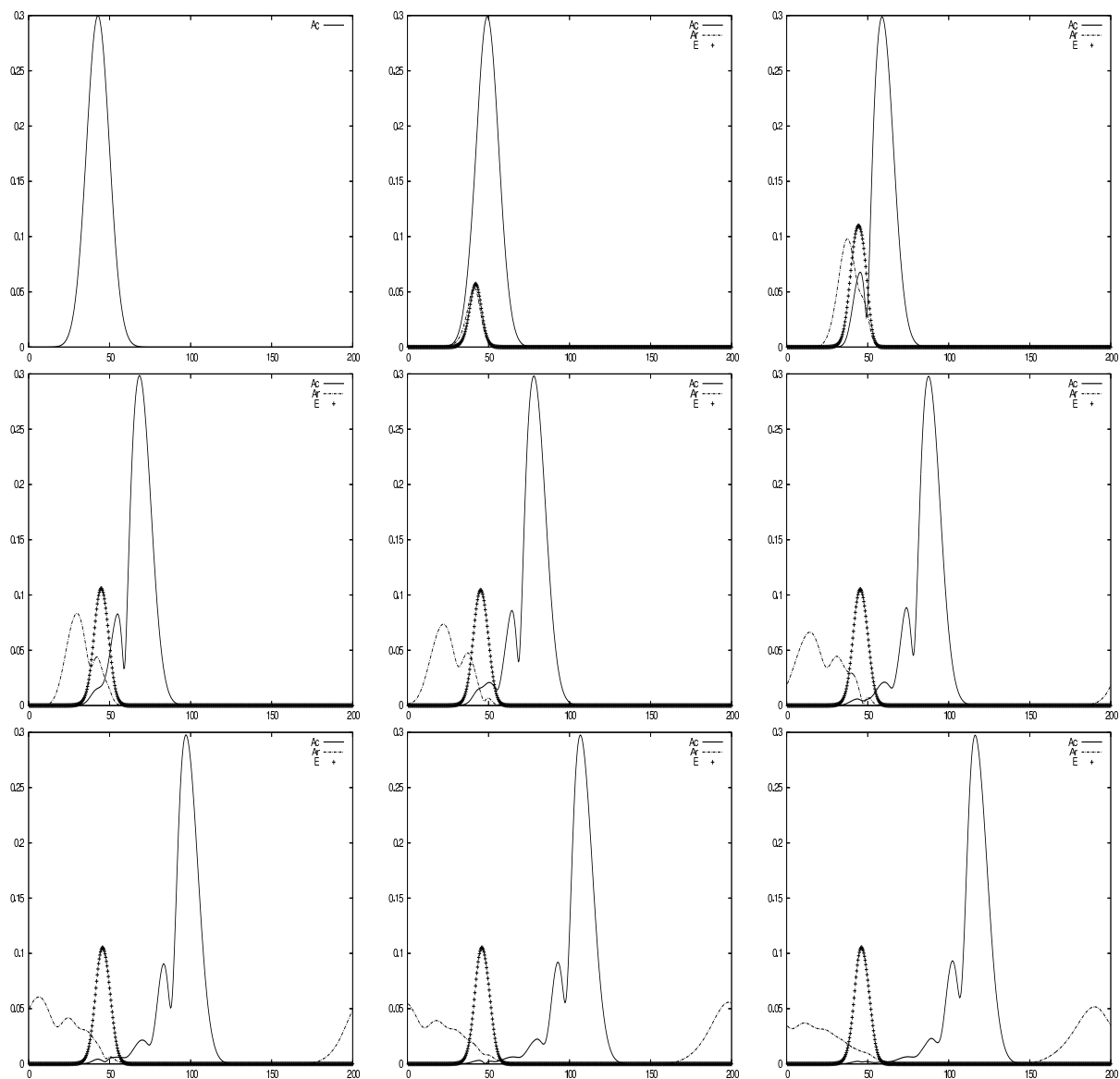


Figure 1: Module des champs aux temps  $t = n * 12$  pour  $n = 0 \dots 8$  avec  $A_C(0) = 0.3e^{-0.01(x-40)^2}$ ,  $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 0.01561$ . Première ligne, de gauche à droite  $n = 0, 1, 2$ , deuxième ligne, de gauche à droite  $n = 3, 4, 5$ , troisième ligne, de gauche à droite  $n = 6, 7, 8$ . La ligne continue correspond à  $A_C$ , la ligne semi-continue à  $A_R$  et les croix à  $E$ .

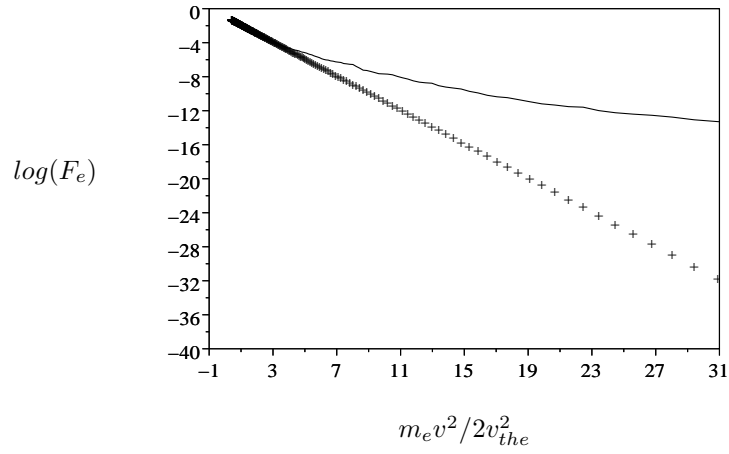


Figure 2: La ligne continue correspond au log de la moyenne spatiale de la fonction de distribution des électrons en fonctions de l'énergie des électrons  $m_e v^2 / 2v_{the}^2$  au temps final du calcul  $\omega_{pe} t = 16000$  avec  $|S|/\sqrt{4\pi n_0 T_e} = 8.10^{-3}$  et  $k_p \lambda_{De} = 0.09$ . La ligne en "+" correspond à la distribution initiale. On voit un chauffage significatif des électrons.