Décomposition de Littlewood-Paley et régularité pour l'équation homogène de Landau.

Mouhamad EL SAFADI, MAPMO, Université d'Orléans

Mots-clés : Equation de Landau, théorie de Littlewood Paley.

Dans cet exposé, nous traitons la régularité pour l'équation de Landau dans le contexte où la solution faible $f(t, x, v)$ est supposée homogène (indépendante de la variable x) de la forme suivante:

$$\partial_t f = \overline{a}\nabla^2 f + \overline{c}f,\ \overline{a} = a * f,\ \overline{c} = c * f \text{ and } c = \nabla^2 a,$$

où $a \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est une matrice de la forme

$$a_{i,j} = (\delta_{i,j} - \frac{v_i v_j}{|v|^2})\chi(|v|)|v|^2,$$

telle que χ est une fonction positive régulière.

Le travail récent sur une telle régularité est du à Desvillettes et Villani [2] qui l'ont traitée en cherchant une estimation classique dans l'espace de Sobolev avec poids et en utilisant des manipulations de type interpolation.

Concernant le mien, il est consacré à retrouver cette régularité en se basant sur les outils de l'analyse harmonique de type "décomposition Littlewood-Paley".
Cette méthode est déjà utilisée récement dans le travail de Alexandre et ElSafadi [1] qui ont démontré une régularité optimale issue de l'équation de Boltzmann avec des noyaux Maxwelliens.

Je commencerai par un rappel sur les propriétés de base d'une telle décomposition afin d'établir le lien avec l'espace de Sobolev avec poids (norme H_p^s) [3] de la forme $\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{jp}2^{ks}||p_k\psi_j f||_{L^2}$. Ensuite, je chercherai à estimer chaque composante $p_k\psi_j f$ dans L^2, en tenant compte des propriétés de l'opérateur p_k et en utilisant surtout des inéqualités de type Young et Cauchy Schwartz.
Finalement, je terminerai avec la convergence de la série via les deux variables k et j, en obtenant une régularité globale en temps t et dans l'espace de Schwarz par rapport à la variable v.

Références

[1] R.Alexandre, M.ElSafadi, *Littlewood-Paley decomposition and regularity isuues in Boltzmann homogeneous equations. II. Non cuttof and non Maxwell cases*, Models and Methods in Applied Sciences, 15 (6), 2005.

[2] L.Desvillettes, C.Villani, *On the Spatially homogeneous Landau Equation for Hard Potentials.PartI: Existence, uniqueness and smoothness*, Communication in Partial Differentiel Equations, 25 (1-2) 216-298, 2000.

[3] Triebel.H, *Theory of function spaces*, Birkhauser Verlag, Basel and al., 1983.

Mouhamad EL SAFADI – mouhamad.el_safadi@univ-orleans.fr
Laboratoire de Mathématique et Applications, Physique Mathématique d'Orléans,
MAPMO UMR 6628, Université d'Orléans, BP 6728
45067 ORLEANS Cedex 2, FRANCE