Transport optimal de courants et Electrodynamique

Yann BRENIER, CNRS, Université de Nice

La théorie du transport optimal de densités, dont l'origine remonte à Monge (1780) et Kantorovich (1942) est traditionnellement rattachée à la recherche opérationnelle, à l'optimisation combinatoire (dans sa version discrète de "linear assignment problem") et aux Statistiques (voir le livre de Rachev et Rüschendorf "Mass transportation problems", Springer 1998). Elle connait aussi d'importants développements en Probabilités (voir l'article de Talagrand, Geom. Funct. Analysis 1996, et le livre de Ledoux "The concentration of measure phenomenon", American Mathematical Society, 2001, etc...). Elle a émergé dans le domaine des équations aux dérivées partielles au cours des années 1990-2000, en particulier après l'article "Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions", Comm. Pure Appl. Math. 1991 (où un lien a été établi avec l'équation de Monge-Ampère de la géométrie riemannienne et l'équation d'Euler de la mécanique des fluides incompressibles), et les résultats consécutifs de régularité de Caffarelli (Comm. Pure Appl. Math. 1992 et Ann. of Math. 1996).

La théorie du transport optimal a connu depuis un essor important avec des applications diverses allant du calcul des variations aux inégalités fonctionnelles en passant par les équations paraboliques et la mécanique des fluides incompressibles et multiphasiques et les problèmes inverses en cosmologie. (Contributions, entre autres, d' Ambrosio, Barthe, Benamou, Caffarelli, Evans, Frisch, Gangbo, Kinderlehrer, McCann, Otto, Tennenbaum, Trudinger, Villani.) Une application assez spectaculaire de la théorie est le travail de reconstitution des vitesses de l'univers primitif mené par l'équipe d'Uriel Frish à l'observatoire de Nice (voir "A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation", Frisch et coll., Nature 417, 260-262-16 Mai 2002).

Il est naturel d'essayer de généraliser le concept de transport optimal, en vue de nouvelles applications. Une première idée est de considérer le transport multiphasique (on transporte plusieurs familles de densités avec des contraintes portant sur l'ensemble : occupation du volume disponible, vitesse moyenne imposée etc...). (Voir, par exemple, le travail avec M. Puel, "Optimal multiphase transportation with prescribed momentum", ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2002.)
Une autre généralisation, qui fait l'objet de cet exposé, est le transport de courants, c'est-à-dire de densités de particules en mouvement. (Le mot courant peut être ici entendu aussi bien au sens appliqué du mouvement des particules chargées ou des fluides géophysiques qu'au sens théorique donné à ce mot en analyse géométrique, notamment pour l'étude des surfaces minimales). Les applications potentielles sont plutôt à rechercher du côté des fluides géophysiques (reconstruction de courants marins, assimilation de données lagrangiennes) ou en vision (interpolations d'images mobiles, cinématographie numérique). Néanmoins, la physique classique est une excellente source d'inspiration et c'est pourquoi, au moins au niveau théorique, il est judicieux de comprendre les équations de l'électromagnétisme (Maxwell et son extension non-linéaire due à Born et Infeld) et de l'électrodynamique classique (Vlasov) comme des équations de transport optimal de courants. Cela nous a conduit, ces dernières années, à étudier de près le modèle de Born-Infeld (BI en abrégé) et ses propriétés mathématiques remarquables.

Le modèle BI date de 1934 et a pour but de résoudre la question classique (voir le cours de physique de Feynman) de l'infinitude de l'énergie électrique associée à une charge ponctuelle. La voie suivie par Born et Infeld consiste à modifier les équations de Maxwell, en les rendant non-linéaires mais, en un certain sens, le moins possible de façon à exclure l'apparition de chocs. Plus précisément, une constante physique E_0 est introduite bornant universellement tout champ électrostatique, en particulier celui généré par une charge électronique ponctuelle. Ce paramètre E_0 joue un peu le même rôle que la vitesse de la lumière, qui borne toute vitesse, en relativité restreinte. Le modèle est bien entendu conçu pour que, dans la limite $E_0 >> 1$, on retrouve les équations de Maxwell linéaires habituelles. Mais lorsque E_0 est fini, des effets non-linéaires apparaissent. Le modèle de Born-Infeld a été rapidement abandonné (y compris par ses auteurs) dans le cadre de l'électrodynamique quantique. Il a néanmoins fait une réapparition remarqué dans les années 1990 en théorie des cordes et des Dirichlet-branes (travaux de Polchinsky, par exemple).

En dehors du contexte physique, il se trouve que le modèle de Born-Infeld, dans la limite $E_0 << 1$ (ce qui veut dire que les champs électriques considérés sont d'intensité maximale), fournit une généralisation tout à fait satisfaisante du concept de transport optimal de courants, que nous décrirons dans l'exposé.

Les équations de Born-Infeld ont, par ailleurs, une structure mathématique remarquable. On peut ainsi, par une technique d'augmentation du système d'équations (similaire à ce qui était connu en Elastodynamique), le rendre galiléen (alors qu'il est au départ lorentzien), ce qui facilite grandement son analyse asymptotique lorsque $E_0 << 1$ (voir le travail avec Wennan Yong dans J. Math. Phys. 2005 et le travail antérieur dans Arch. Rat. Mech. Anal. 2004). D'autre part, les solutions classiques de ce système admettent, pour des données initiales assez grandes, des singularités apparaissant en temps fini. La question se pose donc de les prolonger par des solutions globales faibles. Dans les cas les plus simples, un concept de "solutions de viscosité" adéquat permet un tel prolongement, tout en garantissant la stabilité par rapport aux données initiales (cf. article dans Methods Appl. Anal. 2004). Ce concept permet en plus de construire des schémas d'approximation numérique particulièrement robustes, ce qui n'est pas évident, car, paradoxalement, le caractère "linéairement dégénéré" des équations de Born-Infeld rend leur résolution numérique par les méthodes classiques de CFD très délicate (à cause des concentrations et des discontinuités de contact).

Yann BRENIER – `brenier@math.unice.fr`
FR 2800, Maths, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 02