Propagation du son dans un écoulement : simulation numérique du régime périodique établi

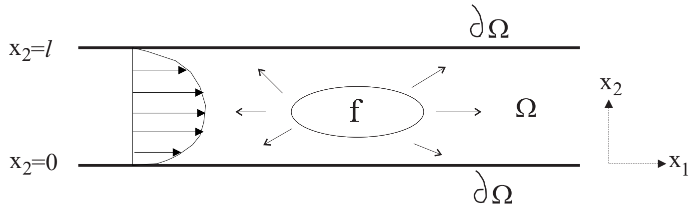
Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Laboratoire POEMS (UMR CNRS-INRIA-ENSTA)

Quel est l'effet d'un écoulement sur la propagation du son ? Cette question est aujourd'hui encore mal comprise, bien qu'intéressant de nombreux domaines d'application : en particulier, une meilleure simulation des phénomènes aéroacoustiques serait un outil utile à la réduction des nuisances sonores dans les transports. Le modèle généralement adopté dans la littérature repose sur la linéarisation des équations d'Euler. Le travail que je vais présenter concerne une équation beaucoup moins connue (due à Galbrun) dont l'inconnue est la perturbation de déplacement. Bien que l'équation de Galbrun soit très similaire aux équations d'ondes classiques, son traitement par une méthode d'éléments finis donne des résultats désastreux. Je montrerai comment remédier à ce problème par l'écriture d'une formulation dite "augmentée" ou "régularisée". Je montrerai également que la méthode des PML (Perfectly Matched Layers) permet alors de traiter de façon satisfaisante la question des frontières artificielles du domaine de calcul.

Ces résultats sont le fruit d'un travail en équipe, au sein du laboratoire POEMS : y ont contribué activement Guillaume Legendre et Eve-Marie Duclairoir (dans le cadre de leurs thèses [1]), Eliane Bécache et Jean-François Mercier. La méthode numérique a été mise en oeuvre dans le code Melina (http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/), développé par Daniel Martin de l'IRMAR.

1 Position du problème

Notre objectif est de calculer le champ acoustique rayonné par une source, dans un fluide en écoulement, en régime périodique établi ($e^{-i\omega t}$). L'inconnue est une petite perturbation d'un écoulement donné, ce qui conduit naturellement à considérer des équations linéarisées. Contrairement au cas classique de l'acoustique dans un milieu au repos, le problème obtenu est vectoriel, car la présence de l'écoulement moyen couple l'acoustique et l'hydrodynamique.
La majorité des travaux cités dans la littérature portent sur les équations d'Euler linéarisées : il s'agit d'un système du premier ordre, portant sur les perturbations de vitesse et de pression, qui a été beaucoup utilisé pour effectuer des simulations temporelles, en utilisant des méthodes de différences finies ou des méthodes de type Galerkin Discontinu. Nous avons fait un choix différent, qui nous semble mieux adapté au traitement par éléments finis du problème en régime harmonique. L'équation que nous considérons est due à Galbrun. C'est un système du second ordre portant sur la perturbation de déplacement.
Nous considérons un problème bidimensionnel posé dans un conduit infini $\Omega = \{0 < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < l\}$, dont les parois sont rigides. Nous supposons que ce conduit contient un fluide compressible en écoulement parallèle et subsonique : autrement dit, l'écoulement est caractérisé par le profil de nombre de Mach, $-1 < M(x_2) < 1$.



En régime périodique établi, la perturbation de déplacement est supposée de la forme

$$\Re e\left(\boldsymbol{u}(x)e^{-i\omega t}\right), \quad \omega > 0$$

et l'on cherche à résoudre un problème de la forme suivante (où f est la source supposée à support compact dans le conduit) :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{D}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \tag{1}$$

et où l'on a noté D l'opérateur de dérivée convective défini par $\mathrm{D} = -ik + M\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ ($k = \omega/c$ est le nombre d'onde, c la vitesse du son).

Le problème doit être complété par des conditions de rayonnement à l'infini, exprimant le fait que l'on s'intéresse à la solution sortante. Ces conditions peuvent être explicitées à l'aide des modes du conduit, mais leur exploitation numérique est délicate, en particulier en raison de l'existence d'un continuum de modes hydrodynamiques convectés par l'écoulement. L'utilisation combinée d'une formulation régularisée et de couches PML nous permettra de contourner cette difficulté.
Le cas de l'écoulement uniforme permet de mieux comprendre les phénomènes modélisés par l'équation de Galbrun. En effet, si M est constant, on vérifie aisément que la pression acoustique $p = -\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ et la vorticité $\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ vérifient deux problèmes découplés : p est solution de l'équation des ondes convectée

$$D^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \boldsymbol{f}$$

et ψ de l'équation

$$D^2 \psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$$

qui modélise la convection des tourbillons par l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement non uniforme, ces deux phénomènes sont couplés.
Finalement, notre objectif est de calculer la solution sortante de (1) en utilisant des éléments finis et des PML.

2 Formulation régularisée

Supposons pour l'instant que l'on cherche à approcher par éléments finis la solution de l'équation de Galbrun dans un domaine borné (une portion Ω_b du conduit Ω).

2.1 Sans écoulement

En l'absence d'écoulement ($M = 0$), il est connu que l'on ne peut pas discrétiser l'équation de Galbrun

$$-\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) - k^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

avec des éléments finis de Lagrange. Ceci est dû à un défaut de compacité (de l'injection de H_{div} dans L^2), difficulté tout à fait analogue à celle largement étudiée dans le cadre des équations de Maxwell harmoniques. Les solutions à ce problème développées dans la littérature consistent soit à utiliser des éléments de Raviart-Thomas, conformes dans H_{div}, soit à écrire une formulation équivalente régularisée du problème. Ceci revient à remarquer, en prenant le rotationnel de l'équation de Galbrun, que le rotationnel de la solution peut être calculé a priori :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \frac{-1}{k^2} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}.$$

On en déduit que $\boldsymbol{u}$ est solution de l'équation suivante, où $\psi_f = \frac{-1}{k^2} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ est une donnée :

$$-\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) + \mathbf{rot}\,(\operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \psi_f) - k^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

qui se récrit :

$$-\Delta \boldsymbol{u} - k^2 \boldsymbol{u} = \mathbf{rot}\, \psi_f + \boldsymbol{f}.$$

Cette équation peut alors être discrétisée à l'aide d'éléments finis de Lagrange classiques (dans un domaine sans coins rentrants).

2.2 Avec écoulement

Avec écoulement, la situation est plus délicate. L'écriture d'une formulation variationnelle de l'équation de Galbrun fait apparaître la forme bilinéaire suivante, dont la partie principale n'a pas un signe fixe :

$$\int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} - M(x_2)^2 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial x_1} - 2ikM(x_2) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \bar{\boldsymbol{v}} - k^2 \boldsymbol{u} \bar{\boldsymbol{v}}$$

Il n'y a donc pas de cadre fonctionnel naturel pour poser le problème, et à plus forte raison, pas d'éléments finis adaptés (analogues à ceux de Raviart-Thomas pour le cas sans écoulement). En revanche, nous allons pouvoir étendre la méthode de régularisation, mais sous une forme plus délicate à mettre en œuvre [2, 3]. L'idée est cette fois de considérer $\psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ comme une nouvelle inconnue. En prenant le rotationnel de l'équation de Galbrun, on obtient la relation suivante entre ψ et $\boldsymbol{u}$ (où M' désigne la dérivée du nombre de Mach par rapport à x_2):

$$\mathrm{D}^2\psi - 2M'\mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \quad (\Omega).$$

Nous allons montrer dans la suite qu'il est alors possible de calculer ψ en fonction de $\boldsymbol{u}$ et d'obtenir un problème régularisé en $\boldsymbol{u}$ possédant de bonnes propriétés mathématiques.

3 Le traitement du problème en conduit infini

3.1 Le problème dissipatif

Nous allons tout d'abord considérer, pour simplifier, le problème dissipatif où le nombre d'onde est supposé complexe de la forme :

$$k_\varepsilon = k + i\varepsilon \qquad \varepsilon > 0.$$

On est alors autorisé à rechercher une solution d'énergie finie (ce qui tient lieu de condition de rayonnement). On considère donc le problème suivant : Trouver $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^2$ et $\psi_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_\varepsilon^2\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon) + \mathbf{rot}\,(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega) \\ &\mathrm{D}_\varepsilon^2\psi_\varepsilon - 2M'\mathrm{D}_\varepsilon\left(\frac{\partial u_{\varepsilon,1}}{\partial x_1}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \quad (\Omega) \\ &\boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon = 0 \quad (\partial\Omega) \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\mathrm{D}_\varepsilon = -ik_\varepsilon + M(x_2)\,\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Si M ne s'annule pas, on peut montrer que pour tout $g_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, l'équation

$$\mathrm{D}_\varepsilon^2\psi_\varepsilon = g_\varepsilon$$

admet une unique solution dans $L^2(\Omega)$ qui s'obtient par convolution avec la solution fondamentale (H désigne la fonction de Heaviside) :

$$G_\varepsilon(x_1, x_2) = H(x_1)\frac{x_1}{M^2(x_2)}\,\exp\left(\frac{ik_\varepsilon x_1}{M(x_2)}\right).$$

On déduit alors de la deuxième équation de (2) que :

$$\psi_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon u_{\varepsilon,1} + \psi_{f,\varepsilon}$$

où

$$\psi_{f,\varepsilon} = G_\varepsilon \overset{x_1}{*} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$$

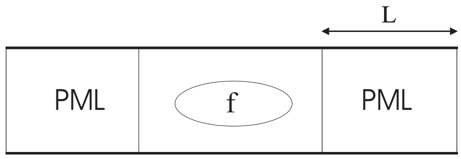
et $\mathbf{A}_\varepsilon$ est un opérateur de convolution d'ordre 0 (continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$). En injectant l'expression de ψ_ε dans la première équation, on obtient finalement le problème suivant, d'inconnue $\boldsymbol{u}_\varepsilon$: Trouver $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^2(\Omega)^2$ solution de :

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_\varepsilon^2\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\nabla}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon) + \mathbf{rot}\,(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \mathbf{A}_\varepsilon u_{\varepsilon,1}) = \boldsymbol{f} + \mathbf{rot}\,\psi_{f,\varepsilon} \quad (\Omega) \\ &\boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_\varepsilon - \mathbf{A}_\varepsilon u_{\varepsilon,1} = \psi_{f,\varepsilon} \quad (\partial\Omega) \end{aligned}$$

Ce problème possède de bonnes propriétés mathématiques : ainsi par exemple, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram si ε est suffisamment grand.

3.2 Perfectly Matched Layers

Pour résoudre le problème sans dissipation, on utilise des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) et on procède comme dans le cas dissipatif. Le modèle dans les couches PML est obtenu à partir du modèle exact en effectuant dans toutes les équations la substitution suivante : $\dfrac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow \alpha \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ où α est un paramètre complexe vérifiant $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$.
Des couches de longueur L sont placées de part et d'autre du support de la source. On résout alors dans le domaine Ω_L décrit ci-dessous



le problème suivant (où l'indice α signifie que la substitution a été effectuée dans les couches PML) :

$$\mathrm{D}_\alpha^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}_\alpha(\mathrm{div}_\alpha\, \boldsymbol{u}) + \mathbf{rot}_\alpha(\mathrm{rot}_\alpha \boldsymbol{u} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega_L)$$

$$\psi = \mathbf{A}_\alpha u_1 + \psi_f \quad (\Omega_L)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}_\alpha \boldsymbol{u} - \psi = 0 \quad (\partial\Omega_L)$$

où $\mathbf{A}_\alpha$ désigne à nouveau un opérateur de convolution en x_1 d'ordre 0. On peut alors comme précédemment exprimer ψ en fonction de $\boldsymbol{u}$, et injecter cette expression dans l'équation de Galbrun régularisée. Ceci nous permet de montrer que le problème d'inconnue $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega_L)^2$ relève de l'alternative de Fredholm.
Enfin, si l'écoulement est uniforme, nous savons montrer [4, 5] que la solution du problème avec PML converge lorsque la largeur L des couches tend vers l'infini vers la solution sortante du problème de rayonnement (1), elle même caractérisée à l'aide d'une technique d'absorption limite.

4 Mise en œuvre et résultats numériques

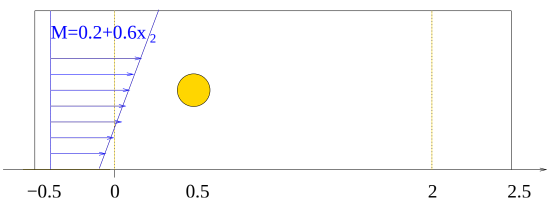
Le problème avec PML est discrétisé à l'aide d'éléments finis de Lagrange. Afin de permettre une évaluation simple (par interpolation) de la formule de convolution en x_1, nous utilisons ici un maillage structuré et des éléments Q2. La convergence de la discrétisation est assurée puisque le problème relève de l'alternative de Fredholm.
En ce qui concerne la résolution du système linéaire, il n'est pas souhaitable d'éliminer l'inconnue ψ car l'opérateur de convolution $\mathbf{A}_\alpha$, qui relie tous les degrés de liberté situés sur une même ligne de courant (x_2=constante), conduit à une matrice beaucoup moins creuse qu'une matrice éléments finis classique [3]. On conserve donc l'inconnue ψ et on met en œuvre l'algorithme itératif suivant initialisé avec $\psi^0 = 0$:

$$\mathrm{D}_\alpha^2 \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{\nabla}_\alpha(\mathrm{div}_\alpha\, \boldsymbol{u}^{n+1}) + \mathbf{rot}_\alpha(\mathrm{rot}_\alpha \boldsymbol{u}^{n+1} - \psi^n) = \boldsymbol{f} \quad (\Omega_L)$$

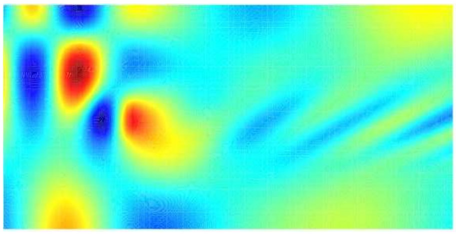
$$\boldsymbol{u}^{n+1}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}_\alpha \boldsymbol{u}^{n+1} - \psi^n = 0 \quad (\partial\Omega_L)$$

$$\psi^{n+1} = \mathbf{A}_\alpha u_1^{n+1} + \psi_f \quad (\Omega_L)$$

On vérifie que cet algorithme converge d'autant plus vite que le gradient de l'écoulement est faible.
Voici finalement un résultat obtenu pour un profil de Mach linéaire ($l = 1$):



On représente les isovaleurs de la composante horizontale du déplacement pour une source irrotationnelle.



On remarque un effet de guide d'onde qui se traduit par une concentration du champ acoustique amont dans la partie haute du conduit. A l'aval de la source, l'acoustique est masquée par les tourbillons, dont la présence se traduit par des stries inclinées. La source étant irrotationnelle ($\psi_f = 0$), c'est le caractère non uniforme de l'écoulement qui explique la présence de ces tourbillons.

5 Conclusion

Nous avons développé une méthode numérique permettant de calculer le champ rayonné par une source de perturbations dans un écoulement cisaillé. Du point de vue théorique, le cas de l'écoulement uniforme a fait l'objet d'une étude complète. En revanche, il reste de nombreuses questions non résolues dans le cas d'un écoulement parallèle quelconque.
Le principal handicap de la méthode, en vue de son extension à des problèmes moins académiques (3D, géométries quelconques), réside dans le calcul de ψ par une formule de convolution le long des lignes de courant. De plus, cette formule dégénère lorsque le nombre de Mach s'annule, ce qui se produit pourtant fréquemment en pratique (au voisinage des parois par exemple).
Nous développons actuellement un modèle approché valable pour les écoulements dont le nombre de Mach est faible. Ce modèle est obtenu en calculant un équivalent de l'intégrale oscillante $\mathbf{A}_\alpha u_1$ lorsque M tend vers 0. On montre ainsi que l'on peut remplacer la formule intégrale

$$\psi = \mathbf{A} u_1$$

par la formule différentielle suivante

$$\psi = \frac{2iM'}{k} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

dont la discrétisation est beaucoup plus simple. Ce modèle nous semble très prometteur pour l'extension au cas tridimensionnel.

Références

[1] G. Legendre, *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 2003.

[2] A.S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre et E. Lunéville, *Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme*, Compte-Rendu à l'Académie des Sciences, Tome 329, Série II b, p. 601–606, 2001.

[3] A.S. Bonnet-Ben Dhia, Eve-Marie Duclairoir, G. Legendre anf J.F. Mercier, *Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow*, Journal of Computational and Applied Mathematics, à paraître.

[4] E. Bécache, A.S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 42, Number 1, pp. 409-433, 2004.

[5] E. Bécache, A.S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre, *Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow*, SIAM Journal on Numerical Analysis, à paraître.

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA – anne-sophie.bonnet-bendhia@ensta.fr
ENSTA-UMA, Laboratoire POEMS, 32 Boulevard Victor, 75015 Paris