

Éléments propres de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

Virginie BONNAILLIE-NOËL, ENS Cachan, antenne de Bretagne

Monique DAUGE, Université Rennes 1

Daniel MARTIN, Université Rennes 1

Grégory VIAL, ENS Cachan, antenne de Bretagne

Mots-clés : Développements asymptotiques, éléments finis de haut degré.

La théorie de la supraconductivité, modélisée par Ginzburg et Landau, est à la source de nombreux travaux sur l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et conditions de Neumann dans un domaine du plan. Dans [4], on analyse l'opérateur modèle donné par :

$$P_h = -h^2 \Delta - ih(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) + \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2),$$

où h représente un petit paramètre semi-classique. On s'intéresse au comportement du bas du spectre de P_h lorsque h tend vers 0 dans le cas d'un secteur plan infini ou d'un domaine borné de \mathbb{R}^2 . Les vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres de P_h ont une structure double échelle, constituée d'une couche limite aux coins à l'échelle \sqrt{h} et d'un terme oscillant à l'échelle h , cf. [3]. Les oscillations hautes fréquences rendent les calculs numériques très délicats : une approximation raisonnable pour des petites valeurs de h requiert un raffinement extrême du maillage, cf. [1].

On propose ici une approche différente basée sur une méthode d'éléments finis nodaux de haut degré (jusqu'à 24), cf. [5], qui se révèle particulièrement efficace. Cette technique permet d'illustrer des résultats théoriques fins concernant les développements asymptotiques des premiers modes propres.

Des calculs à h fixé sur un secteur angulaire renseignent sur le comportement des valeurs propres vis à vis de l'ouverture. Cette situation constitue le modèle pour un polygone borné, après localisation en chaque sommet. La concentration des vecteurs propres au voisinage de certains coins du domaine est clairement illustrée par les résultats numériques. Ces calculs permettent d'observer les modes propres de P_h pour différents domaines tels qu'un carré, un losange, un trapèze, un polygone non convexe ou un polygone curviligne. Les symétries du carré engendrent des interactions entre les sommets, mettant ainsi en évidence l'effet tunnel.

Références

- [1] F. ALOUGES AND V. BONNAILLIE-NOËL, *Numerical computations of fundamental eigenstates for the Schrödinger operator under constant magnetic field*, Numerical Methods for PDE, in press, 2006.
- [2] V. BONNAILLIE, *On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners*, Asymptot. Anal. 41, 3-4, p. 215–258, 2005.
- [3] V. BONNAILLIE NOËL AND M. DAUGE, *Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corner*, Ann. Henri Poincaré, in press, 2006.
- [4] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, D. MARTIN AND G. VIAL, *Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field*, Prépublication IRMAR 05-37, 2005.
- [5] D. MARTIN, <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>.

Virginie BONNAILLIE-NOËL – Virginie.Bonnaillie@bretagne.ens-cachan.fr

ENS Cachan, antenne de Bretagne 35170 Bruz cedex

Monique DAUGE – Monique.Dauge@univ-rennes1.fr

Université Rennes 1, Campus de Beaulieu 35042 Rennes cedex

Daniel MARTIN – Daniel.Martin@univ-rennes1.fr

Université Rennes 1, Campus de Beaulieu 35042 Rennes cedex

Grégory VIAL – Gregory.Vial@bretagne.ens-cachan.fr

ENS Cachan, antenne de Bretagne 35170 Bruz cedex