

Couplage éléments finis - formule intégrale en magnétostatique

Stéphane BALAC, ICJ (UMR 5208), INSA de Lyon, 69621 Villeurbanne

Gabriel CALOZ, IRMAR (UMR 6625), Université de Rennes 1, 35042 Rennes

Nous présentons une méthode pour calculer le champ magnétique \mathbf{H} engendré par un dispositif électromagnétique composé d'un corps Ω faiblement ferro-magnétique de perméabilité magnétique μ constante et d'un inducteur Ω_s caractérisé par une densité de courant \mathbf{j} ; le problème est posé dans l'espace.

Le champ magnétique total \mathbf{H} s'écrit sous la forme $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$ où \mathbf{H}_s , le champ généré par le courant source est calculé en utilisant les formules de Biot et Savart, et \mathbf{H}_m , le champ induit par le corps ferro-magnétique, satisfait $\mathbf{H}_m = -\nabla\varphi$ où le *potentiel magnétique réduit* (PMR) φ est donné par

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \overline{\Omega}^c, \\ \mu \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega^c} = (\mu - 1) g & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \quad (\text{avec } g = \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}). \end{cases}$$

Ce problème est posé dans un domaine non borné et le calcul du PMR se fait à l'aide d'un couplage entre une méthode d'éléments finis et une représentation intégrale; la méthode est fortement inspirée des travaux [1]. Le domaine extérieur initialement non borné est borné par une frontière artificielle Γ qui peut être choisie très proche mais distincte de la frontière Σ du corps Ω . La condition limite à imposer sur la frontière artificielle Γ est obtenue en utilisant une formule de représentation intégrale pour φ , le domaine d'intégration étant le bord de l'objet Σ . La formulation variationnelle du problème posé dans le nouveau domaine borné Ω_Γ délimité par la frontière artificielle Γ est de la forme : trouver $\varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$ tel que pour tout $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\omega + \int_{\Omega_{\Sigma\Gamma}} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\omega + \int_{\Gamma} \varphi \psi \, d\gamma + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} \varphi(x) D^\Gamma G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\ & = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g \psi \, d\sigma + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} g(x) D^\Gamma G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y, \end{aligned}$$

où G représente le noyau de Green associé au Laplacien 3D, G_n sa dérivée normale sur Σ et D^Γ l'opérateur différentiel de bord sur Γ défini par $D^\Gamma u = \frac{\partial u}{\partial n} + u$.

La formulation variationnelle ci-dessus est discrétisée par une approximation éléments finis standard. Comme les deux frontières sont distinctes, tous les intégrands apparaissant dans la formule sont réguliers. La mise en œuvre numérique de la méthode est faite en utilisant la librairie MÉLINA, voir [2]. Pour des éléments finis isoparamétriques de degré k , nous avons démontré que l'erreur de discrétisation a un comportement en $\mathcal{O}(h^k)$. Une fois le PMR calculé, nous utilisons la formule intégrale :

$$\mathbf{H}(y) = \mathbf{H}_s(y) + (1 - \mu) \int_{\Sigma} g(x) \nabla_y G(x, y) \, d\sigma_x - (1 - \mu) \int_{\Sigma} \varphi(x) \nabla_y G_n(x, y) \, d\sigma_x,$$

pour calculer le champ magnétique au point $y \in \mathbb{R}^3$. Notons que la formule ci-dessus ne peut pas être utilisée en l'état : pour des valeurs de μ très supérieures à l'unité, les erreurs de calcul pour le PMR approché conduisent à de mauvais résultats. Un développement du PMR en fonction de μ conduit à des formules donnant de bons résultats pour \mathbf{H} .

Notre méthode réconcilie les avantages des éléments finis et des éléments frontières. Le comportement de la solution à l'infini est pris en compte de manière exacte sur la frontière artificielle. Cette méthode de calcul nous paraît bien adaptée à des problèmes d'optimisation de forme en électromagnétisme où le domaine d'intérêt est localisé, comme l'entrefer d'un électro-aimant. Nous utilisons une méthode analogue en formulation axisymétrique.

Références

- [1] M. LENOIR, *Méthodes de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance des vagues bidimensionnelles*. PhD thesis, Université Paris VI, 1982.
- [2] D. MARTIN, MÉLINA, *librairie éléments finis*. Documentation : <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/2006>.

Stéphane BALAC – Stephane.Balac@insa-lyon.fr

Institut Camille Jordan, Bât. Léonard de Vinci, INSA de Lyon, 69621 Villeurbanne, France