Sur une méthode de préconditionnement

Adnane AZZOUZI, Université de Picardie

Ce travail porte sur la mise en œuvre d'une méthode de préconditionnement dans le cadre des approximations par éléments finis. Cette approche a été validée pour les approximations par différences finies [1]. Pour l'étude de cette méthode dans le cadre éléments finis [2] on s'est intéressé à la résolution numérique du problème continu ci-dessous Trouver u tel que

$$\begin{array}{l} -u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x) \quad \text{dans} \quad]0,1[, \\ \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0, \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = 0, \end{array} \tag{1}$$

où $f \in L^2(]0,1[), \;\; a, b \in L^\infty(]0,1[), \;\; b > 0 \;\; pp., \;\; \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$

Le travail est divisé sur trois parties:
* premièrement la discrétisation de (1) par éléléments finis P_1, P_2 et P_3.
* deuxièment la résolution numérique de chaque problème discret associé à (1) en utilisant une méthode itérative de type GMRES [3].
* enfin la partie la plus importante, c'est le préconditionnement de la méthode itérative basée sur le principe variationnel [4] décrit ci-dessous.

Soit V_h et W_h deux espaces d'approximation par éléments finis, approchant un même éspace continu. On note par $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur $V_h \times V_h$ et par $l(.)$ une forme linéaire sur V_h et on considère le problème discret: trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{2}$$

De la même manière, on note par $b(.,.)$ une forme bilinéaire sur $W_h \times W_h$ et par $f(.)$ une forme linéaire sur W_h et on considère le problème discret: trouver $z_h \in W_h$ tel que

$$b(z_h, w_h) = f(w_h) \qquad \forall v_h \in W_h. \tag{3}$$

On suppose que (2) est numériquement plus facile à résoudre que (3), notament lorsque $\dim(V_h) << \dim\ (W_h)$ ou plus généralement quand la matrice issue de (2) est de meilleur conditionnement que celle issue de (3). En revanche, on admettra que (3) fournit une solution plus précise, c'est par exemple le cas avec V_h engendré par une base de P_1 et W_h engendré par une base de P_3.
l'idée consiste à préconditionner la solution de (3) par celle de (2).

La technique de préconditionnement proposée permet de réduire de manière spéctaculaire le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. Ce nombre d'itérations semble indépendant de la taille du système et il faudrait vérifier si le préconditionnement sous-jacent est inconditionnel.
Parmi les points envisagés,c'est dà appliquer cette méthode à des problèmes de dimension supérieure

Références

[1] J.P. Chehab, *Preconditioning of quasirational approximations matrices*, Note ANO, 406, 1999.

[2] B. Lucquin, O. Pironneau, *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris, 1995.

[3] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 1996.

[4] J.M. Ghidaglia, F. Pascal, *Passerelles volumes finis-elements finis*, C.R. Acad. Sci. Paris,t.328, Serie I, p.711-716, 1999.

Adnane AZZOUZI – adnane.azzouzi@u-picardie.fr
L.A.M.F.A. CNRS UMR 6140 Faculté de Mathématiques et d'Informatique 33, rue Saint-Leu 80039 Amiens Cedex 1