Régularité des Champs Maxwelliens dans des Domaines Lipschitziens et Application.

Naïma AISSA, USTHB, Faculté des Mathématiques, Alger.

On considère le modèle de matériaux ferroélectriques introduit par [6] posé sur un domaine borné lipschitzien Ω dont la normale unitaire extérieure sera notée par $\mathbf{n}$. Il s'agit du couplage des équations de Maxwell satisfaites par le champ électromagnétique (E, H) et de l'équation de la polarisation satisfaite par la polarisation électrique P. Le couplage est non linéaire du fait que le champ électrique d'équilibre $\widehat{E}(P)$ est de la forme $P\phi'(|P|^2)$ où ϕ est une fonction régulière donnée par [6]. Les hypothèses sur ϕ impliquent que $\widehat{E}(P)$ est lipschitzien par rapport à P et par suite le couplage peut être considéré comme une perturbation lipschitzienne d'un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions (Cf [3]). L'étude de la stabilité du champ électrique d'équilibre (sous l'effet d'un changement d'échelle ou de la présence de petites impuretés par exemple) requiert une certaine régularité sur la polarisation électrique que nous nous proposons d'étudier dans ce travail. On considère une condition aux limites de type Silver-Müller pour le champ électromagnétique. Concernant la polarisation, plusieurs conditions aux limites peuvent être envisagées. Le cas de la condition aux limites $P \times \mathbf{n} = 0$ a fait l'objet de [1] et donne lieu à une régularité H^1 sur P, H^s étant l'espace de Sobolev classique, $s > 0$. Tandis que dans le cas de la condition proposée par [6], à savoir $\operatorname{rot} P \times \mathbf{n} = 0$, la régularité n'est pas évidente. Aussi nous proposons un nouveau modèle dans [2] donnant lieu à une régularité H^1 sur P. Nous nous intéressons dans ce travail à la régularité de P dans le cas de la condition de Silver-Müller $\operatorname{rot} P \times \mathbf{n} + \beta \mathbf{n} \times ((P + \partial_t P) \times \mathbf{n}) = 0$. Nous avons dans ce cas la régularité $P \in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot} P \in L^2(\Omega),\ P \times \mathbf{n} \in L^2$ sans aucune information sur $\operatorname{div} P$. Rappelons que l'espace de Hilbert suivant (cf [4])

$$W = \left\{P \in L^2(\Omega),\ \operatorname{div} P \in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot} P \in L^2(\Omega),\ P \times \mathbf{n} \in L^2(\partial\Omega)\ \ (ou\ \ P \cdot \mathbf{n} \in L^2(\partial\Omega))\right\} \tag{1}$$

s'injecte continûment dans $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ et par conséquent l'injection de W dans $L^2(\Omega)$ est compacte.
On se propose de remplacer, dans W l'hypothèse $\operatorname{div} P \in L^2(\Omega)$ par une hypothèse plus faible de telle sorte que l'injection compacte de W dans $L^2(\Omega)$ soit préservée. Comme la divergence d'un champ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ appartient à $(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Omega))'$ qui est par définition l'espace d'interpolation réelle $[L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{\frac{1}{2}}$, on montre en utilisant un argument d'interpolation ainsi que les résultats de [5] que l'espace

$$W_c = \left\{P \in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot} P \in L^2(\Omega),\ P \times \mathbf{n} \in L^2(\partial\Omega), \operatorname{div} P \in (H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Omega))'\right\} \tag{2}$$

s'injecte continûment dans $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (resp $H^{\frac{1}{4}}(\Omega)$) dans le cas où Ω est lipschitzien convexe (resp lipschitzien simplement connexe). Notons que dans ce dernier cas, la régularité peut être obtenue avec l'hypothèse plus faible $\operatorname{div} P \in H^{-\frac{3}{4}}(\Omega)$. En écrivant les équations de compatibilité du couplage, on déduit une régularité analogue pour la solution du modèle de matériaux ferroélectriques et la stabilité du champ électrique d'équilibre s'en suivra.

Références

[1] N. Aïssa, *Asymptotic Behavior of Thin Ferroelectric Materials,* à paraître dans Port. Math.

[2] N. Aïssa, K. Hamdache, *Asymptotics of Time Harmonic Solutions to a Thin Ferroelectric Model,* à paraître dans Abstract. Appl. Anal.

[3] H. Ammari, K. Hamdache, *Global Existence and Regularity of Solutions to a System of Nonlinear Maxwell equations,* J. Math. Anal. Appl, **286**, 51-63, (2003).

[4] M. Costabel, *A Remark on the Regularity of Solutions of Maxwell's Equations in Lipschitz Domains,* M2AS, **12**, 365-368, (1990).

[5] D. Jerison, C. Kenig, The Inhomogeneous Dirichlet Problem in Lipschitz Domains, *Journal of Functional Analysis,* **130**, 161-219, (1995).

[6] J.M. Greenberg, R.C. Mac Camy, C.V. Coffman, *On the Long-time Behavior of Ferroelectric Systems,* Physica D, **134**, 362-383, (1999).

Naïma AISSA – aissa.naima@gmail.com, naimaaissa@yahoo.fr
USTHB, Faculté des Mathématiques, BP 32, El Alia, 16111, Alger.