Effet de la perturbation du domaine sur le comportement asymptotique et estimations de convergence des éléments propres de l'opérateur de Laplace

Abdessatar KHELIFI, Université de Carthage

Dans ce travail, on adresse la méthode des équations intégrale pour étudier l'effet entre géométrie, conditions de bord et propriétés spectrales des éléments propres de l'opérateur de Laplace.
Afin d'établir des estimations de convergences, on présente des développements asymptotiques des fonctions propres.
Dans la littérature, on trouve que les propriétés du problème de valeur propre sous déformation de domaine ont été le sujet de certaines études importantes [3], [1], [2], [4].
Nous considérons le problème de valeur propre associé à l'opérateur de Laplace:

$$\Delta u(\epsilon) + \lambda(\epsilon) u(\epsilon) = 0, \quad \text{in } \Omega_\epsilon, \text{ and } u(\epsilon) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_\epsilon. \tag{1}$$

$\partial\Omega_\epsilon = \{\gamma_\epsilon(s,t) = \gamma(s,t) + \epsilon\beta(s,t), \quad (s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi], \epsilon \in \mathbb{R}\}$. Les fonctions $\gamma(s,t)$ et $\beta(s,t)$: $[0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sont analytiques, π-périodique suivant le variable s, et 2π-périodique suivant le variable t.
Notons $\lambda_0 > 0$ la valeur propre du problème (1) pour $\epsilon = 0$ avec la multiplicité géométrique $m \geq 2$ dans Ω_0. Il existe une constante $r_0 > 0$ telle que λ_0 est l'unique valeur propre de (1) pour $\epsilon = 0$ dans l'ensemble $\{\lambda, \lambda \in D_{r_0}(\lambda_0)\}$, où $D_{r_0}(\lambda_0)$ est le disque de centre λ_0 et de rayon r_0. Appelons " λ_0-group" la totalité des valeurs propres perturbées de (1) pour $\epsilon > 0$ produit en se dédoublant de λ_0 (voir par exemple [3],[2]).

Théorème 1: *Soit $\mathcal{K}_0$ un voisinage de $\overline{\Omega}_0$ dans $\mathbb{R}^3$. Il existe une constante $\epsilon_0 > 0$ choisit de sorte que la base orthonormale des fonctions propres $(u_j(\epsilon))_j$ associées aux "λ_0-group", $(\lambda_j(\epsilon))_j$, dans $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ dépend analytiquement de $(x,\epsilon) \in \mathcal{K}_0 \times]-\epsilon_0, \epsilon_0[$. De plus, ces fonctions propres vérifient le développement asymptotique uniforme suivant:*

$$u_j(\epsilon) = u_0^j + \sum_{n \geq 1} u_{j,n} \epsilon^n,$$

où la famille $(u_0^j)_j$ forme la base des fonctions propres de (1) associées à λ_0 et normalisées dans $L^2(\Omega_0)$.

Théorème 2: *Soient les fonctions γ, β et Ω_ϵ définies comme precedement et soient les fonctions $u_j(\epsilon)$ et u_0^j, pour $j = 1, \cdots, m$, données par Théorème 1. Alors,*

(i) *Il existe une constante $0 < \epsilon_1 \leq 1/M$, $M = \max|\beta(s,t)|$ et une autre constante positive $k_j^{(1)}$ qui dépend de λ_0, u_0^j, $|\gamma|$ et M mais indépendante de ϵ telle que:*

$$\|u_j(\epsilon) - u_0^j\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq k_j^{(1)} \epsilon^{1/2}, \quad \text{pour } 0 < \epsilon \leq \epsilon_1.$$

(ii) *Il existe une constante positive $0 < \epsilon_2 \leq \epsilon_1$ et une constante $k_j^{(2)}$ telle que pour $j = 1, \cdots, m$:*

$$|\lambda_j(\epsilon) - \lambda_0| \leq k_j^{(2)} \epsilon^{\frac{5}{2m}}, \quad \text{pour } 0 < \epsilon \leq \epsilon_2.$$

Références

[1] H. Ammari and S. Moskow, . *Asymptotic expansions for eigenvalues in the presence of small inhomogeneities* Math. Meth. Appl. Sci. 26 (2003), 67-75

[2] O. P. Bruno and F. Reitich, *Boundary-variation Solution of Eigenvalue Problems for Elliptic Operators*, J. Fourier Anal. Appl. 7 (2001), 169-187.

[3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2end edition, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[4] J.E. Osborn, *Spectral Approximations for Compact Operators,* Math. Comp., Vol 29 (1975), 712-725.

Abdessatar KHELIFI – abdessatar.khelifi@fsb.rnu.tn
FSB - Université 7- Novembre de Carthage, Jarzouna - 7021 -Bizerte - Tunisie