Résolution deux échelles des équations de Maxwell

Sébastien JUND, IRMA, Université de Strasbourg

Nous avons adapté une méthode deux échelles developpée par R. Glowinski et al. [1] sur une équation de Maxwell stationnaire, plus précisément : soit $\Omega \subset R^2$ un ouvert borné, régulier de R^2 de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et soit $\omega \subset \Omega$ un autre ouvert régulier inclu dans Ω de frontière γ. Notons $\overrightarrow{n}$ (resp. $\overrightarrow{m}$) le vecteur normal unitaire sortant de ω sur γ (resp. de Ω sur Γ).

$$\left\{ \begin{array}{l} U + \nabla \times \nabla \times U = f \text{ dans } \Omega, \\ U \times \overrightarrow{m} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{1}$$

où $f \in (L^2(\Omega))^2$ est la somme de deux fonctions $f_1, f_2 \in (L^2(\Omega))^2, f = f_1 + f_2$ avec $supp(f_2) \subset \omega$. Sachant que f_1 et f_2 ont pour vocation d'être respectivement les parties à faible et forte variation, nous montrons qu'il est possible de résoudre le problème en résolvant deux problèmes auxiliaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} V + \nabla \times \nabla \times V = f_1 \text{ dans } \Omega, \\ V \times \overrightarrow{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \left[V \right] = 0 \text{ sur } \gamma, \\ \left[(\nabla \times V) \times \overrightarrow{n} \right] = -\lambda \text{ sur } \gamma \end{array} \right. \tag{2}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} W + \nabla \times \nabla \times W = f_1 + f_2 \text{ dans } \omega, \\ W \times \overrightarrow{n} = V \times \overrightarrow{n} \text{ sur } \gamma \end{array} \right. \tag{3}$$

où $\lambda = ((\nabla \times \overline{V}^+) \times \overrightarrow{n}) - ((\nabla \times \overline{W}) \times \overrightarrow{n})$ avec $\overline{V}^+$ lui-même restriction à $\Omega \backslash \overline{\omega}$ de la solution de (2) avec $\lambda = 0$, et $\overline{W}$ la solution de (3) qui en résulte. Ces deux problèmes peuvent maintenant être résolu sur des échelles adaptées, à savoir une échelle grocière pour le problème (2), et une échelle fine pour le problème (3).

Nous testons numériquement cette résolution en utilisant des éléments fini de Raviart-Thomas-Nédélec de divers ordres pour mettre en évidence le peu de perte que celle-ci entraîne par rapport à une résolution directe du problème initial (1).

Références

[1] R. Glowinski, J. He, J. Rappaz & J. Wagner A multi-domain method for solving numerically multi-scale elliptic problems , R. Glowinski and al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 , 2004.

Sébastien JUND – `jund@math.u-strasbg.fr`
IRMA, Université de Strasbourg, 7 Rue René Descartes, 67084 Strasbourg