



# **Tenseurs de polarisation pour les structures minces. Application aux arbres auto-similaires 2D.**

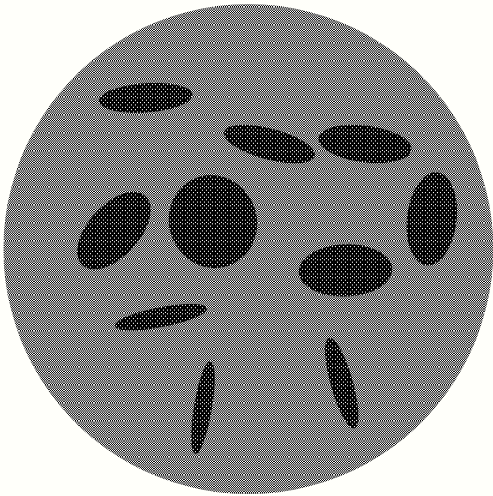
Yves Capdeboscq

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, France

**Canum 06. Session Poumons - biomédical**

**Mardi 29 mai 2006.**

## Imagerie d'impédance pour les inclusions de faible volume

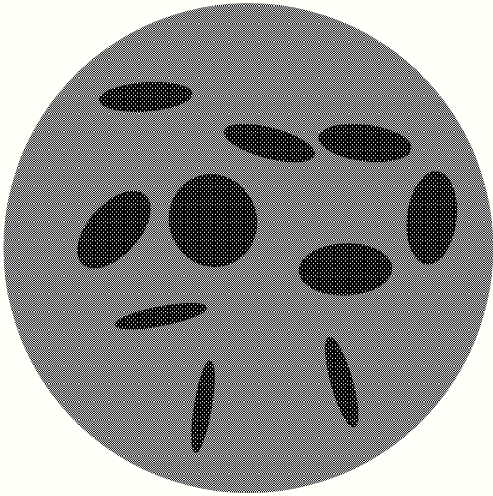


$$\gamma^\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma^0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega_\varepsilon \\ \gamma^1 & \text{sur } \omega_\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &\subset K_0 \subset \Omega \\ 0 &< \gamma^0, \gamma^1 < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot n = \phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

## Imagerie d'impédance pour les inclusions de faible volume



$$\gamma^\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma^0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega_\varepsilon \\ \gamma^1 & \text{sur } \omega_\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &\subset K_0 \subset \Omega \\ 0 &< \gamma^0, \gamma^1 < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot n = \phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Objectif: Caractériser le comportement asymptotique de  $u_\varepsilon$  sur la frontière du domaine dans la limite faible fraction volumique.



## Cadre des problèmes inverses

On compare

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La solution de} \\ \nabla \cdot (\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla u^\varepsilon \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à la solution (connue) de} \\ \nabla \cdot (\gamma^0 \nabla u^0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla u^0 \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

sur le bord du domaine.

On peut mesurer l'application Dirichlet - Neumann.  $g \mapsto u^\varepsilon$ .

Cadre perturbatif:  $\gamma^\varepsilon \rightarrow \gamma^0$ , et  $u^\varepsilon \rightarrow u^0$  dans  $H^1(\Omega)^d$ .



## Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega \quad + o(|\omega_\varepsilon|)$$



## Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega \frac{\partial N}{\partial x_j}(x, y) + o(|\omega_\varepsilon|)$$

$N(x, y)$  est la fonction de Neumann associée à  $\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla )$ :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\gamma_0 \nabla_x N(x, y)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(x) \frac{\partial N}{\partial n_x} &= -\delta_y + \frac{1}{|\partial\Omega|} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$



## Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega \frac{\partial N}{\partial x_j}(x, y) d\mu(x) + o(|\omega_\varepsilon|)$$

$N(x, y)$  est la fonction de Neumann associée à  $\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla )$ :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\gamma_0 \nabla_x N(x, y)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(x) \frac{\partial N}{\partial n_x} &= -\delta_y + \frac{1}{|\partial\Omega|} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La mesure de probabilité  $\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} 1_{\omega_\varepsilon}$  converge faible\* dans le dual de  $C^0(\overline{\Omega})$ .



## Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega (\gamma_1 - \gamma_0)(x) M_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_j}(x, y) d\mu(x) + o(|\omega_\varepsilon|)$$

$N(x, y)$  est la fonction de Neumann associée à  $\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla )$ :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\gamma_0 \nabla_x N(x, y)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(x) \frac{\partial N}{\partial n_x} &= -\delta_y + \frac{1}{|\partial\Omega|} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La mesure de probabilité  $\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} 1_{\omega_\varepsilon}$  converge faible\* dans le dual de  $C^0(\overline{\Omega})$ .

La fonction matricielle  $M$  est dans  $L^2(\Omega, d\mu)$ . Les valeurs de  $M$  sont des matrices symétriques définies positives.



## Définition de $M$

La formule dit que

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup M_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\mu \text{ (à une sous-suite près).}$$



## Définition de $M$

La formule dit que

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup M_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\mu \text{ (à une sous-suite près).}$$

Les coefficients de  $M$  sont définis en terme de fonctions de type correcteur.

On considère les problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\gamma_\varepsilon \nabla v_\varepsilon^j) = \nabla \cdot (\gamma_0 \nabla v_0^j) & \text{dans } \Omega \\ \gamma_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial n} = \gamma_0 \frac{\partial v_0^j}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega, \\ v_0^j = x_j + \text{cste}, & \end{array} \right.$$

## Définition de $M$

La formule dit que

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon dx \rightarrow M_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\mu \text{ (à une sous-suite près).}$$

Les coefficients de  $M$  sont définis en terme de fonctions de type correcteur.

On considère les problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\gamma_\varepsilon \nabla v_\varepsilon^j) = \nabla \cdot (\gamma_0 \nabla v_0^j) & \text{dans } \Omega \\ \gamma_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial n} = \gamma_0 \frac{\partial v_0^j}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega, \\ v_0^j = x_j + \text{cste}, & \end{array} \right.$$

et on définit  $M$  par

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial x_j} \xrightarrow{\text{def}} M_{ij} d\mu.$$



## Plan

1. *Formule de représentation et tenseurs de polarisation*
2. Bornes ponctuelles et bornes optimales
3. Tenseurs de polarisation pour les structures minces.
4. Arbres auto-similaires 2D



Bornes: définition d'une énergie.

Le tenseur de polarisation  $M$  vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H^1(\Omega)} \int_{\Omega} \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} \mathbf{1}_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 dx \\ + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 dx + o(1) .$$



Bornes: définition d'une énergie.

Le tenseur de polarisation  $M$  vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_Q \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 dx + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 dx + o(1) .$$

avec  $\Omega \subset Q$  .



## Bornes: définition d'une énergie

Le tenseur de polarisation  $M$  vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j \phi d\mu = \frac{1}{|\omega_{\varepsilon}|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_Q \hat{\gamma}_{\varepsilon} \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_{\varepsilon}} \xi \right|^2 \phi dx \\ + \frac{1}{|\omega_{\varepsilon}|} \int_{\omega_{\varepsilon}} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 \phi dx + o(1) .$$

pour toute fonction régulière et strictement positive  $\phi$  sur  $Q$ .



## Bornes: définition d'une énergie

Le tenseur de polarisation  $M$  vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j \phi d\mu = \frac{1}{|\omega_{\varepsilon}|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_Q \hat{\gamma}_{\varepsilon} \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_{\varepsilon}} \xi \right|^2 \phi dx \\ + \frac{1}{|\omega_{\varepsilon}|} \int_{\omega_{\varepsilon}} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 \phi dx + o(1) .$$

pour toute fonction régulière et strictement positive  $\phi$  sur  $Q$ .

Cela permet d'obtenir (après passage à la limite)

$$\min \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) |\xi|^2 \leq M(x) \xi \cdot \xi \leq \max \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) |\xi|^2 ,$$

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mu$  presque partout dans l'ensemble  $\{x \in \Omega : \gamma_0(x) \neq \gamma_1(x)\}$ .



## Bornes pour le tenseur $M$ (C-Vogelius)

$M$  satisfait,  $\mu$

$$\min \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d \leq M(x) \leq \max \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d,$$

et sa trace vérifie  $\mu$  p.p des bornes plus strictes

$$\text{trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \quad (1)$$

$$\text{trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad (2)$$



## Bornes pour le tenseur $M$ (C-Vogelius)

$M$  satisfait,  $\mu$

$$\min \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d \leq M(x) \leq \max \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d,$$

et sa trace vérifie  $\mu$  p.p des bornes plus strictes

$$\text{trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \quad (1)$$

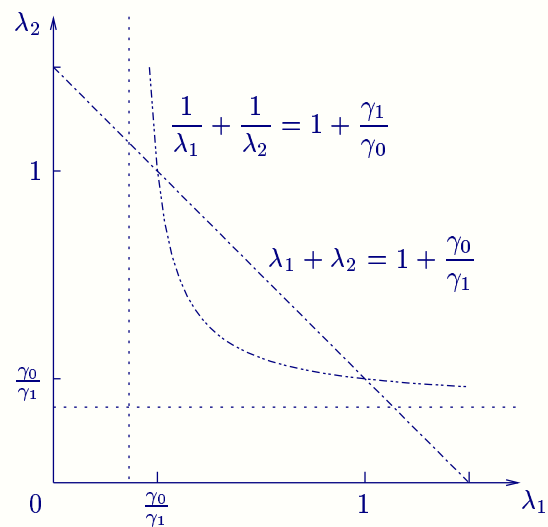
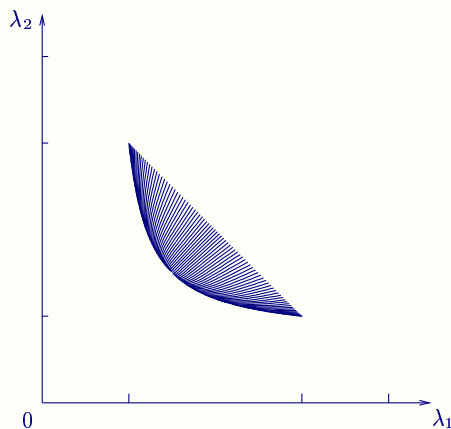
$$\text{trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad (2)$$

Formules comparables : Hashin-Shtrikman (H), Murat-Tartar (H), Lurie-Cherkaev (H), Kohn-Milton (H-P), Lipton (P).



## Bornes optimales

En  $2D$ , tout point de l'ensemble limite peut être atteint comme tenseur de polarisation d'une rondelle elliptique.





## Plan

1. *Formule de représentation et tenseurs de polarisation*
2. *Bornes ponctuelles et bornes optimales*
3. Tenseurs de polarisation pour les structures minces.
4. Arbres auto-similaires 2D



## Conséquence des bornes de traces ponctuelles

$M$  vérifie,  $\mu$  p.p.

$$\min \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d \leq M(x) \leq \max \left( 1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d,$$

$$\text{trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1},$$

et

$$\text{trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0}.$$

Donc

$$\text{Si } M(x)e_d \cdot e_d = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \cdot e_d \text{ alors } M(x)e_d = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d$$

et si  $(e_1, \dots, e_d)$  est une base orthonormale,

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, M(x)e_i = e_i$$

## Conséquence des bornes de traces ponctuelles

Le tenseur de polarisation  $M$  vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j \phi d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_{\Omega} \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 \phi dx \\ + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 \phi dx + o(1) .$$

pour toute fonction strictement positive régulière  $\phi$  sur  $\Omega$ . Donc, si il existe une suite de fonctions  $w_\varepsilon$  telle que

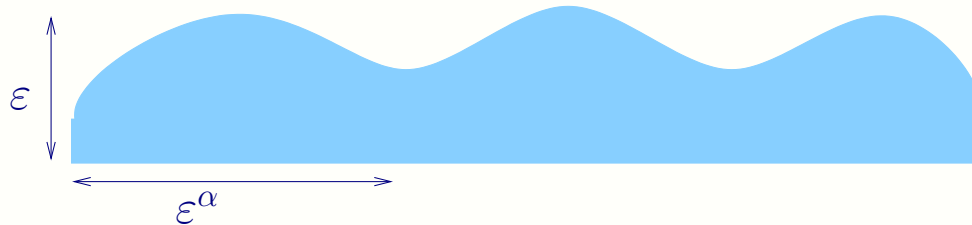
$$\lim_{\omega_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \|\nabla w_\varepsilon - 1_\varepsilon e_d\| = 0,$$

alors

$$M(x) = \sum_{j=1}^{d-1} e_j \otimes e_j + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \otimes e_d,$$

$\mu$  presque partout.

## Structures minces (C-Vogelius)



Pour les domaines de la forme

$$\omega_\varepsilon = \{(x', x_d) : x' \in S_0, \text{ and } \|x_d\| < \varepsilon h_\varepsilon(x')\}$$

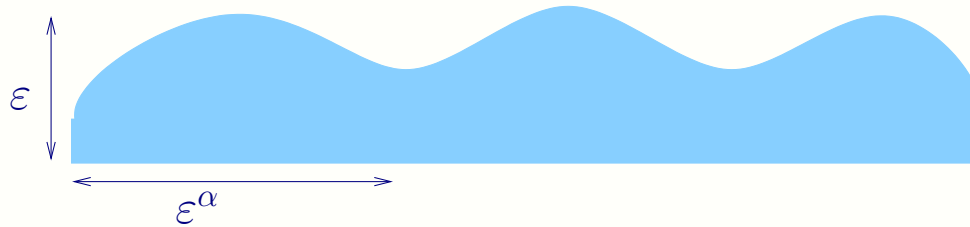
avec pour tout  $\varepsilon$ ,

$$0 < c < h_\varepsilon < C, \|h_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{-\alpha} \text{ avec } \alpha < 1$$

, et  $h_\varepsilon \rightharpoonup h_0$  faible\*  $L^\infty$  vers un  $h_0 \in L^\infty(S_0)$ . Alors

$$d\mu = \frac{1}{\int_{S_0} h_0(x') dx'} h_0(x') dx'_{S_0} \text{ et } M(x) = \sum_{j=1}^{d-1} e_j \otimes e_j + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \otimes e_d.$$

## Structures minces (C-Vogelius)



Pour les domaines de la forme

$$\omega_\varepsilon = \{(x', x_d) : x' \in S_0, \text{ and } \|x_d\| < \varepsilon h_\varepsilon(x')\}$$

avec pour tout  $\varepsilon$ ,

$$0 < c < h_\varepsilon < C, \|h_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{-\alpha} \text{ avec } \alpha < 1$$

, et  $h_\varepsilon \rightharpoonup h_0$  faible\*  $L^\infty$  vers un  $h_0 \in L^\infty(S_0)$ . Alors

$$d\mu = \frac{1}{\int_{S_0} h_0(x') dx'} h_0(x') dx'_{S_0} \text{ et } M(x) = \sum_{j=1}^{d-1} e_j \otimes e_j + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \otimes e_d.$$

(Beretta-Francini-Vogelius, Beretta-Mukherjee-Vogelius)

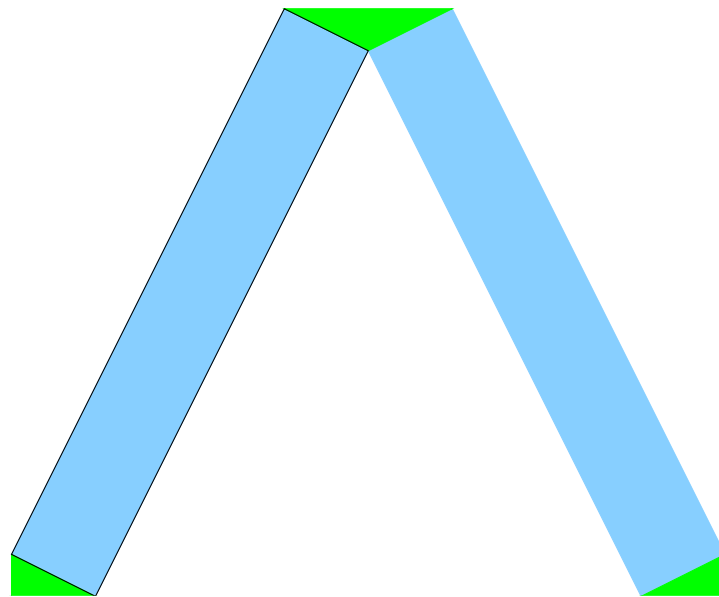


## Plan

1. *Formule de représentation et tenseurs de polarisation*
2. *Bornes ponctuelles et bornes optimales*
3. *Tenseurs de polarisation pour les structures minces.*
4. Arbres auto-similaires 2D

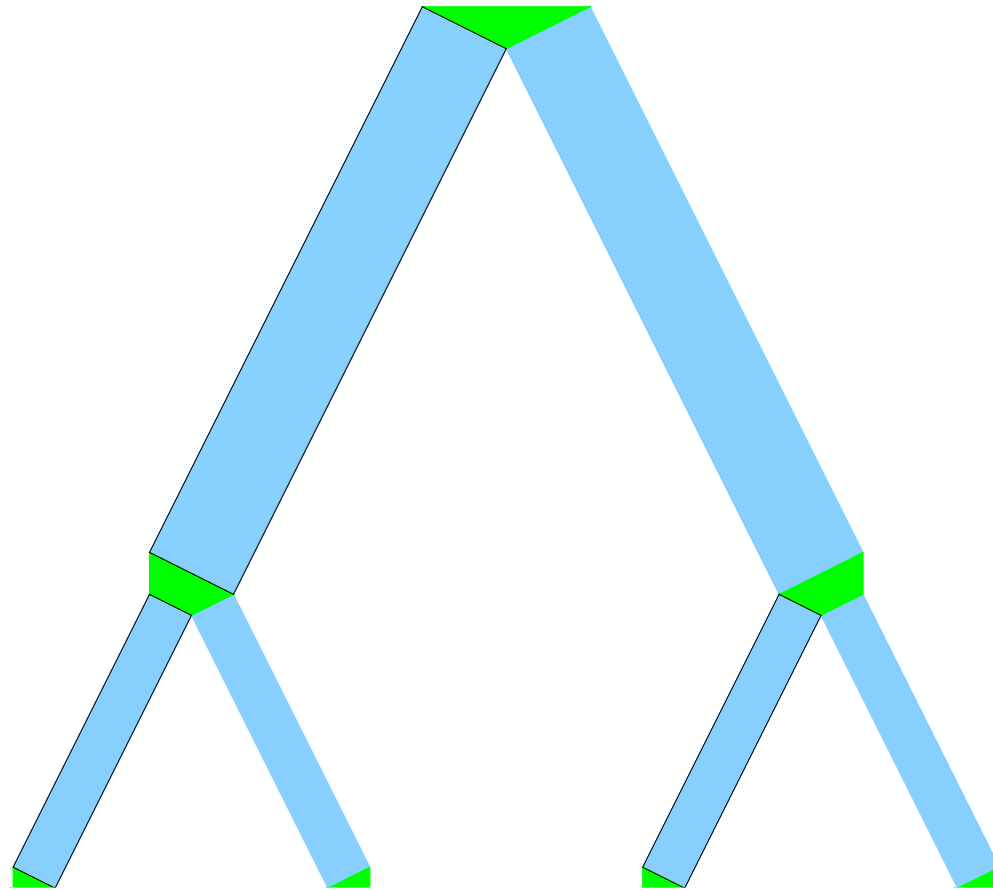


# Arbres auto-similaires minces dyadiques.



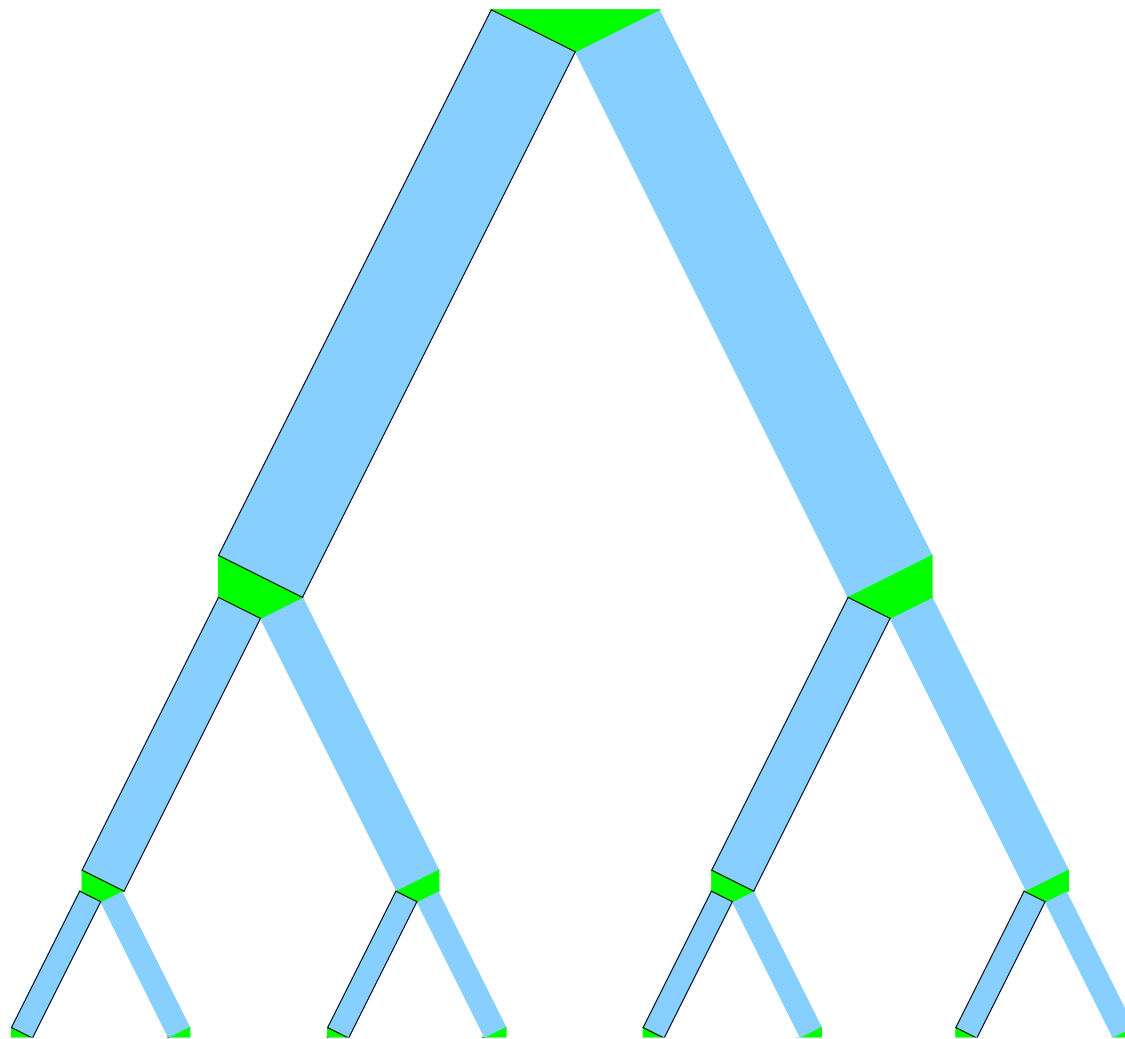


Arbres auto-similaires minces dyadiques.



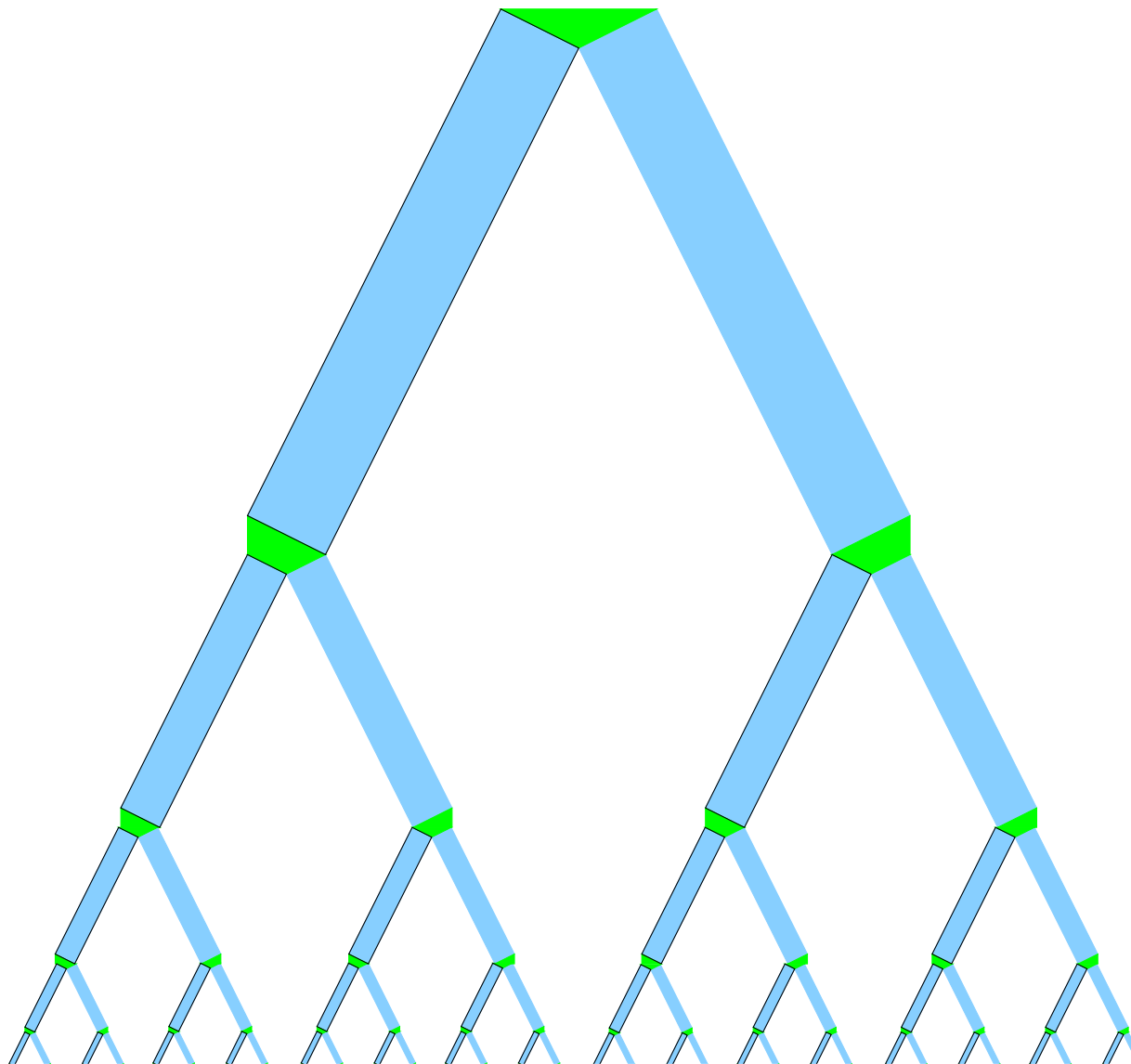


Arbres auto-similaires minces dyadiques.



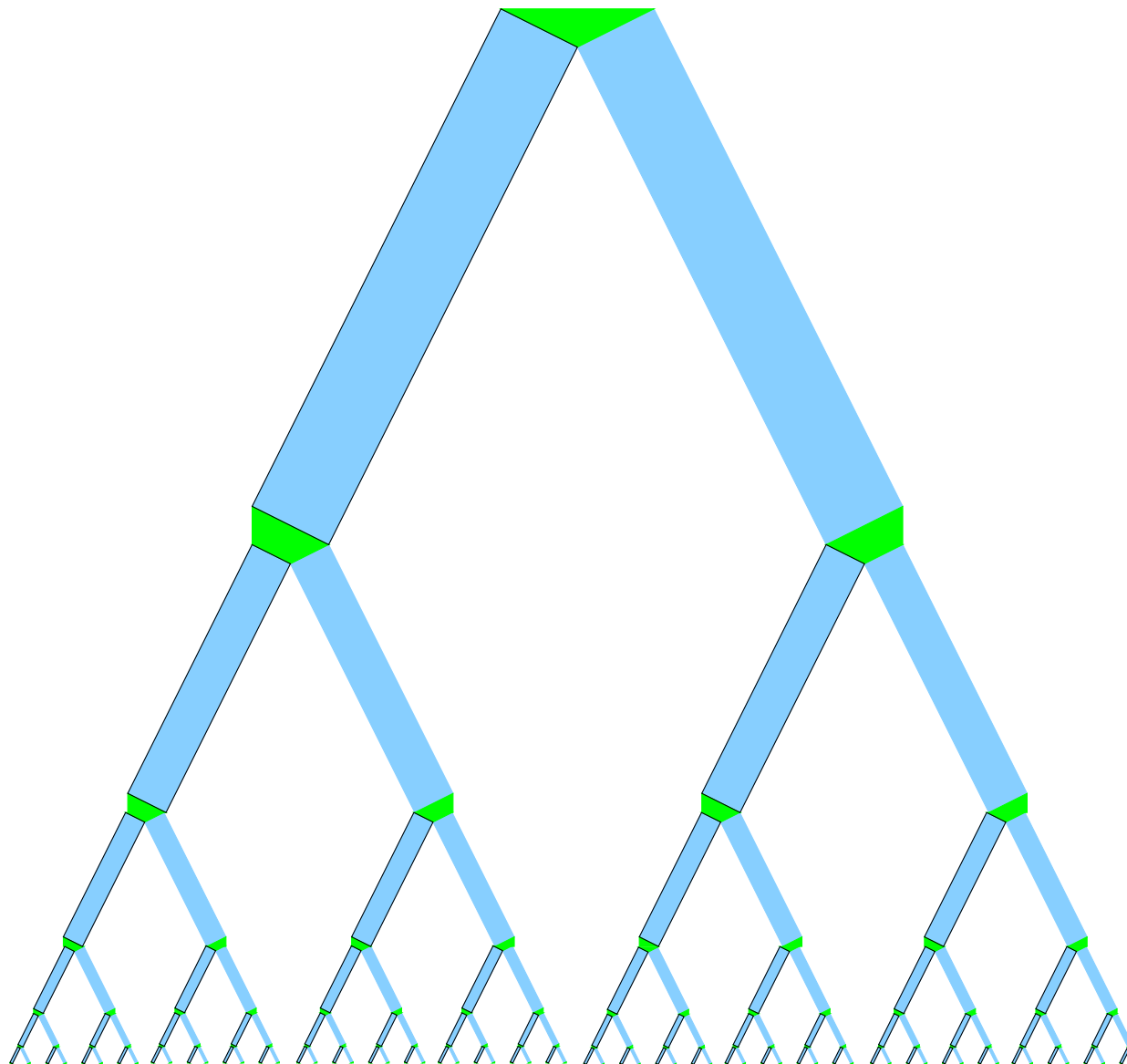


# Arbres auto-similaires minces dyadiques.





# Arbres auto-similaires minces dyadiques.





## Arbres auto-similaires minces dyadiques.(Briane-C)

Soit  $Q_\varepsilon$  le rectangle  $[1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon] \times [1/2, 1]$ . Il existe une fonction  $\phi_\varepsilon$  continue linéaire par morceaux, égale à  $x_1$  sur  $Q$ , supportée par un voisinage de taille  $\sqrt{\varepsilon}$  de  $Q$ , et telle que

$$\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \|\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

## Arbres auto-similaires minces dyadiques. (Briane-C)

Soit  $Q_\varepsilon$  le rectangle  $[1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon] \times [1/2, 1]$ . Il existe une fonction  $\phi_\varepsilon$  continue linéaire par morceaux, égale à  $x_1$  sur  $Q$ , supportée par un voisinage de taille  $\sqrt{\varepsilon}$  de  $Q$ , et telle que

$$\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \|\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

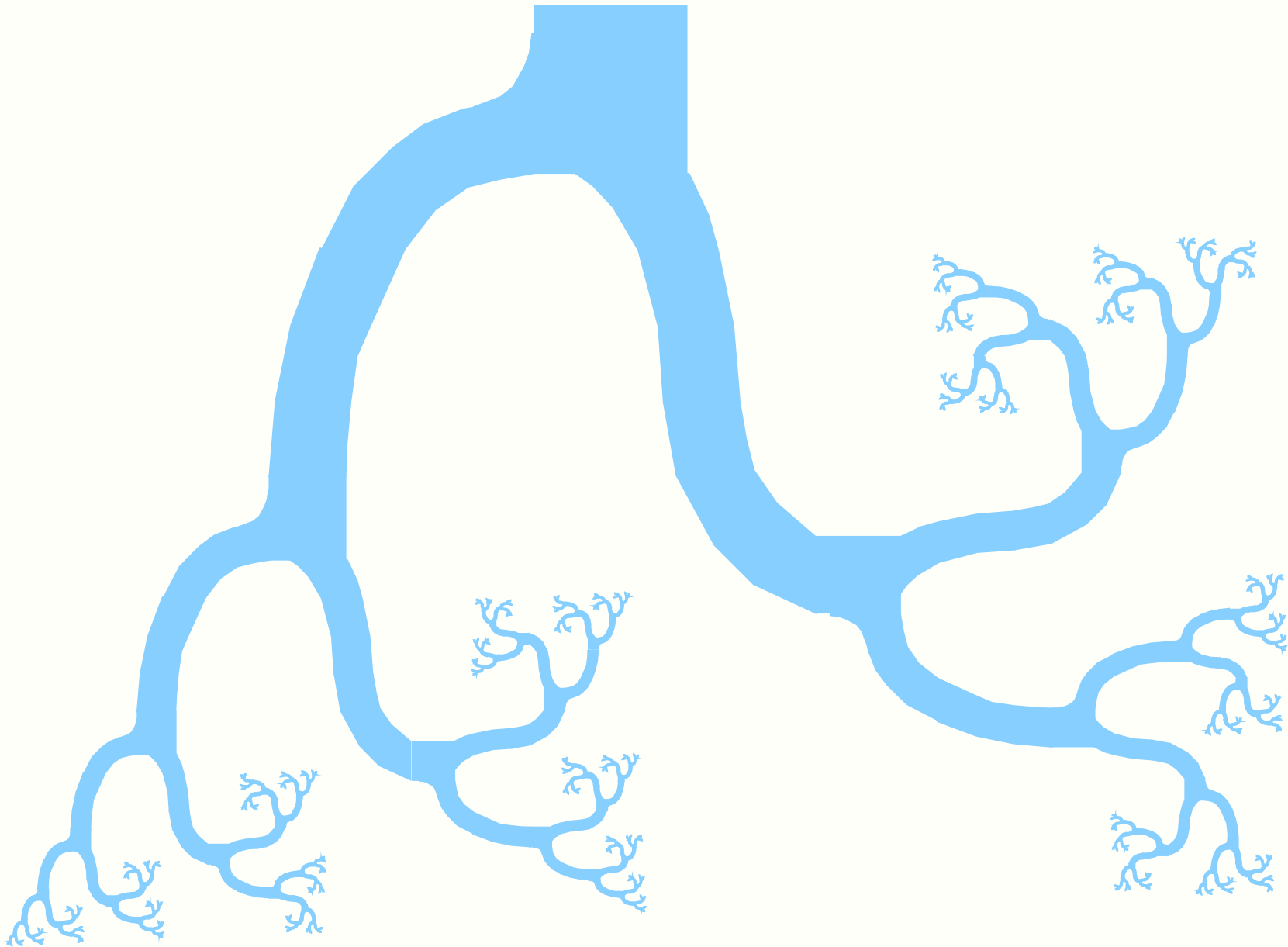
Sur l'arbre dyadique donné par  $\mathbf{1}_{T_\varepsilon} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2^k-1} \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}(2^{-k}x + j)$  la fonction  $\varphi_\varepsilon$  définie à partir de  $\phi$  par

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon &= \phi_\varepsilon(x) + \frac{1}{2} (\phi_\varepsilon(2x) + \phi_\varepsilon(2x - 1)) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\phi_\varepsilon(4x) + \phi_\varepsilon(4x - 1) + \phi_\varepsilon(4x - 2) + \phi_\varepsilon(4x - 3)) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^N} (\phi_\varepsilon(2^N x) + \dots) \end{aligned}$$

vérifie aussi  $\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \|\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{1}_{T_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon}$



# Arbres auto-similaires minces.



(même résultat)



Merci