



Tenseurs de polarisation pour les structures minces. Application aux arbres auto-similaires 2D.

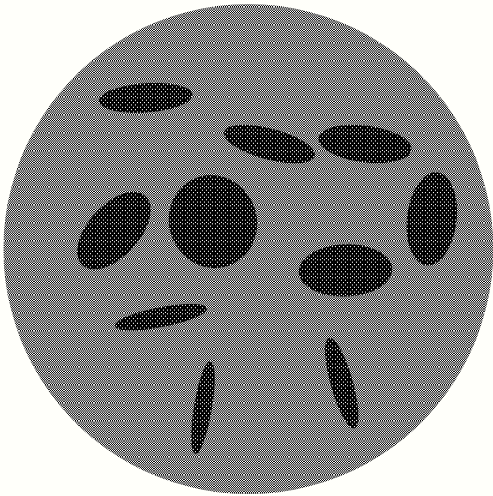
Yves Capdeboscq

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, France

Canum 06. Session Poumons - biomédical

Mardi 29 mai 2006.

Imagerie d'impédance pour les inclusions de faible volume

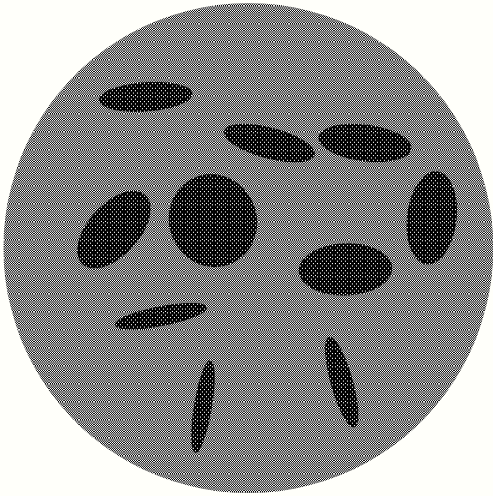


$$\gamma^\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma^0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega_\varepsilon \\ \gamma^1 & \text{sur } \omega_\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &\subset K_0 \subset \Omega \\ 0 &< \gamma^0, \gamma^1 < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot n = \phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Imagerie d'impédance pour les inclusions de faible volume



$$\gamma^\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma^0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega_\varepsilon \\ \gamma^1 & \text{sur } \omega_\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &\subset K_0 \subset \Omega \\ 0 &< \gamma^0, \gamma^1 < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot n = \phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Objectif: Caractériser le comportement asymptotique de u_ε sur la frontière du domaine dans la limite faible fraction volumique.



Cadre des problèmes inverses

On compare

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La solution de} \\ \nabla \cdot (\gamma^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla u^\varepsilon \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à la solution (connue) de} \\ \nabla \cdot (\gamma^0 \nabla u^0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla u^0 \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

sur le bord du domaine.

On peut mesurer l'application Dirichlet - Neumann. $g \mapsto u^\varepsilon$.

Cadre perturbatif: $\gamma^\varepsilon \rightarrow \gamma^0$, et $u^\varepsilon \rightarrow u^0$ dans $H^1(\Omega)^d$.



Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega \quad + o(|\omega_\varepsilon|)$$



Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega \frac{\partial N}{\partial x_j}(x, y) + o(|\omega_\varepsilon|)$$

$N(x, y)$ est la fonction de Neumann associée à $\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla)$:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\gamma_0 \nabla_x N(x, y)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(x) \frac{\partial N}{\partial n_x} &= -\delta_y + \frac{1}{|\partial\Omega|} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$



Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_\Omega \frac{\partial N}{\partial x_j}(x, y) d\mu(x) + o(|\omega_\varepsilon|)$$

$N(x, y)$ est la fonction de Neumann associée à $\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla)$:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\gamma_0 \nabla_x N(x, y)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(x) \frac{\partial N}{\partial n_x} &= -\delta_y + \frac{1}{|\partial\Omega|} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La mesure de probabilité $\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} 1_{\omega_\varepsilon}$ converge faible* dans le dual de $C^0(\overline{\Omega})$.



Formule de représentation générale C - Vogelius

$$\forall y \in \partial\Omega, u_\varepsilon(y) - u_0(y) = |\omega_\varepsilon| \int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0)(x) M_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_j}(x, y) d\mu(x) + o(|\omega_\varepsilon|)$$

$N(x, y)$ est la fonction de Neumann associée à $\nabla \cdot (\gamma_0 \nabla)$:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\gamma_0 \nabla_x N(x, y)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(x) \frac{\partial N}{\partial n_x} &= -\delta_y + \frac{1}{|\partial\Omega|} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La mesure de probabilité $\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} 1_{\omega_\varepsilon}$ converge faible* dans le dual de $C^0(\overline{\Omega})$.

La fonction matricielle M est dans $L^2(\Omega, d\mu)$. Les valeurs de M sont des matrices symétriques définies positives.



Définition de M

La formule dit que

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup M_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\mu \text{ (à une sous-suite près).}$$



Définition de M

La formule dit que

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup M_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\mu \text{ (à une sous-suite près).}$$

Les coefficients de M sont définis en terme de fonctions de type correcteur.

On considère les problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\gamma_\varepsilon \nabla v_\varepsilon^j) = \nabla \cdot (\gamma_0 \nabla v_0^j) & \text{dans } \Omega \\ \gamma_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial n} = \gamma_0 \frac{\partial v_0^j}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega, \\ v_0^j = x_j + \text{cste}, & \end{array} \right.$$

Définition de M

La formule dit que

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon dx \rightarrow M_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} d\mu \text{ (à une sous-suite près).}$$

Les coefficients de M sont définis en terme de fonctions de type correcteur.

On considère les problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\gamma_\varepsilon \nabla v_\varepsilon^j) = \nabla \cdot (\gamma_0 \nabla v_0^j) & \text{dans } \Omega \\ \gamma_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial n} = \gamma_0 \frac{\partial v_0^j}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega, \\ v_0^j = x_j + \text{cste}, & \end{array} \right.$$

et on définit M par

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial x_j} \xrightarrow{\text{def}} M_{ij} d\mu.$$



Plan

1. *Formule de représentation et tenseurs de polarisation*
2. Bornes ponctuelles et bornes optimales
3. Tenseurs de polarisation pour les structures minces.
4. Arbres auto-similaires 2D



Bornes: définition d'une énergie.

Le tenseur de polarisation M vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H^1(\Omega)} \int_{\Omega} \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 dx \\ + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 dx + o(1) .$$



Bornes: définition d'une énergie.

Le tenseur de polarisation M vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_Q \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 dx + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 dx + o(1) .$$

avec $\Omega \subset Q$.



Bornes: définition d'une énergie

Le tenseur de polarisation M vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j \phi d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_Q \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 \phi dx \\ + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 \phi dx + o(1) .$$

pour toute fonction régulière et strictement positive ϕ sur Q .



Bornes: définition d'une énergie

Le tenseur de polarisation M vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j \phi d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_Q \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 \phi dx \\ + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 \phi dx + o(1) .$$

pour toute fonction régulière et strictement positive ϕ sur Q .

Cela permet d'obtenir (après passage à la limite)

$$\min \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) |\xi|^2 \leq M(x) \xi \cdot \xi \leq \max \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) |\xi|^2 ,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, μ presque partout dans l'ensemble $\{x \in \Omega : \gamma_0(x) \neq \gamma_1(x)\}$.



Bornes pour le tenseur M (C-Vogelius)

M satisfait, μ

$$\min \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d \leq M(x) \leq \max \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d,$$

et sa trace vérifie μ p.p des bornes plus strictes

$$\text{trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \quad (1)$$

$$\text{trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad (2)$$



Bornes pour le tenseur M (C-Vogelius)

M satisfait, μ

$$\min \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d \leq M(x) \leq \max \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d,$$

et sa trace vérifie μ p.p des bornes plus strictes

$$\text{trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \quad (1)$$

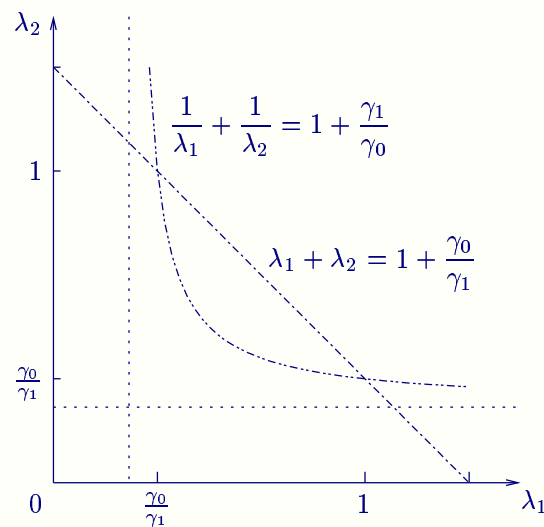
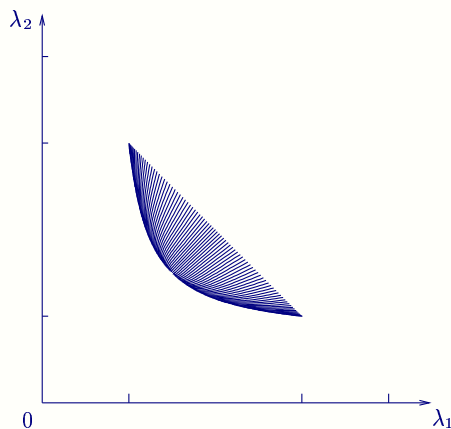
$$\text{trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad (2)$$

Formules comparables : Hashin-Shtrikman (H), Murat-Tartar (H), Lurie-Cherkaev (H), Kohn-Milton (H-P), Lipton (P).



Bornes optimales

En $2D$, tout point de l'ensemble limite peut être atteint comme tenseur de polarisation d'une rondelle elliptique.





Plan

1. *Formule de représentation et tenseurs de polarisation*
2. *Bornes ponctuelles et bornes optimales*
3. Tenseurs de polarisation pour les structures minces.
4. Arbres auto-similaires 2D

Conséquence des bornes de traces ponctuelles

M vérifie, μ p.p.

$$\min \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d \leq M(x) \leq \max \left(1, \frac{\gamma_0(x)}{\gamma_1(x)} \right) I_d,$$

$$\text{trace } M(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1},$$

et

$$\text{trace } M^{-1}(x) \leq d - 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0}.$$

Donc

$$\text{Si } M(x)e_d \cdot e_d = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \cdot e_d \text{ alors } M(x)e_d = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d$$

et si (e_1, \dots, e_d) est une base orthonormale,

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, M(x)e_i = e_i$$

Conséquence des bornes de traces ponctuelles

Le tenseur de polarisation M vérifie

$$\int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_0) M_{ij} \xi_i \xi_j \phi d\mu = \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \min_{w \in H_{per}^1(Q)} \int_{\Omega} \hat{\gamma}_\varepsilon \left| \nabla w + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1} 1_{\omega_\varepsilon} \xi \right|^2 \phi dx \\ + \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\gamma_0}{\gamma_1} |\xi|^2 \phi dx + o(1) .$$

pour toute fonction strictement positive régulière ϕ sur Ω . Donc, si il existe une suite de fonctions w_ε telle que

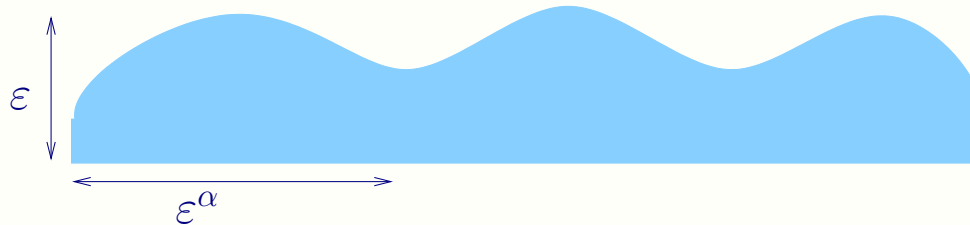
$$\lim_{\omega_\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \|\nabla w_\varepsilon - 1_\varepsilon e_d\| = 0,$$

alors

$$M(x) = \sum_{j=1}^{d-1} e_j \otimes e_j + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \otimes e_d,$$

μ presque partout.

Structures minces (C-Vogelius)



Pour les domaines de la forme

$$\omega_\varepsilon = \{(x', x_d) : x' \in S_0, \text{ and } \|x_d\| < \varepsilon h_\varepsilon(x')\}$$

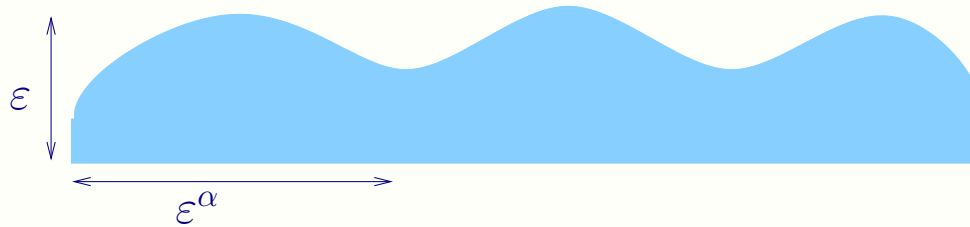
avec pour tout ε ,

$$0 < c < h_\varepsilon < C, \|h_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{-\alpha} \text{ avec } \alpha < 1$$

, et $h_\varepsilon \rightharpoonup h_0$ faible* L^∞ vers un $h_0 \in L^\infty(S_0)$. Alors

$$d\mu = \frac{1}{\int_{S_0} h_0(x') dx'} h_0(x') dx'_{S_0} \text{ et } M(x) = \sum_{j=1}^{d-1} e_j \otimes e_j + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \otimes e_d.$$

Structures minces (C-Vogelius)



Pour les domaines de la forme

$$\omega_\varepsilon = \{(x', x_d) : x' \in S_0, \text{ and } \|x_d\| < \varepsilon h_\varepsilon(x')\}$$

avec pour tout ε ,

$$0 < c < h_\varepsilon < C, \|h_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{-\alpha} \text{ avec } \alpha < 1$$

, et $h_\varepsilon \rightharpoonup h_0$ faible* L^∞ vers un $h_0 \in L^\infty(S_0)$. Alors

$$d\mu = \frac{1}{\int_{S_0} h_0(x') dx'} h_0(x') dx'_{S_0} \text{ et } M(x) = \sum_{j=1}^{d-1} e_j \otimes e_j + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} e_d \otimes e_d.$$

(Beretta-Francini-Vogelius, Beretta-Mukherjee-Vogelius)

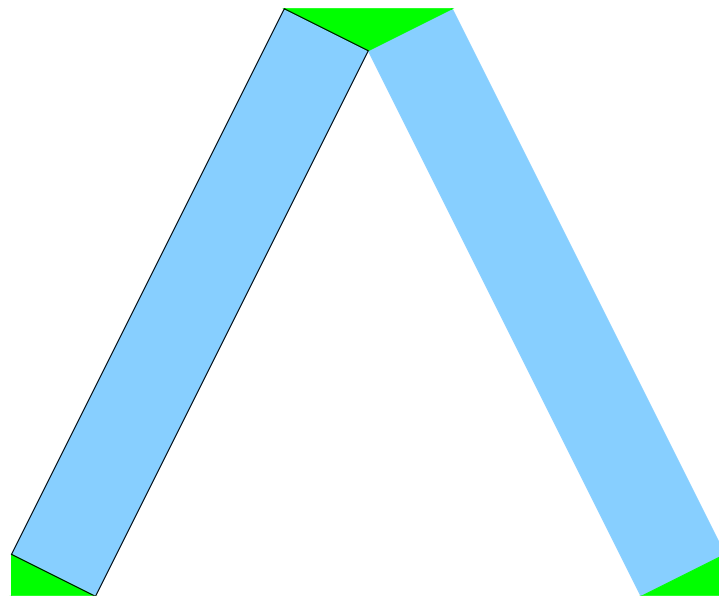


Plan

1. *Formule de représentation et tenseurs de polarisation*
2. *Bornes ponctuelles et bornes optimales*
3. *Tenseurs de polarisation pour les structures minces.*
4. Arbres auto-similaires 2D

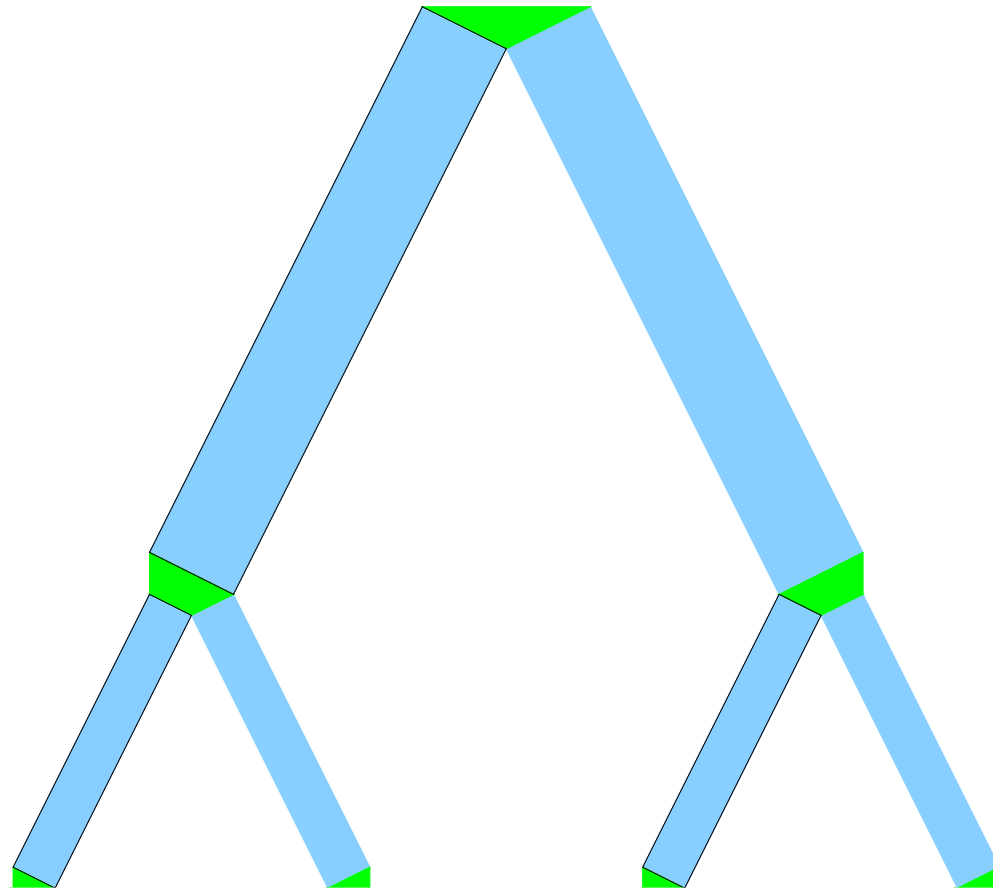


Arbres auto-similaires minces dyadiques.



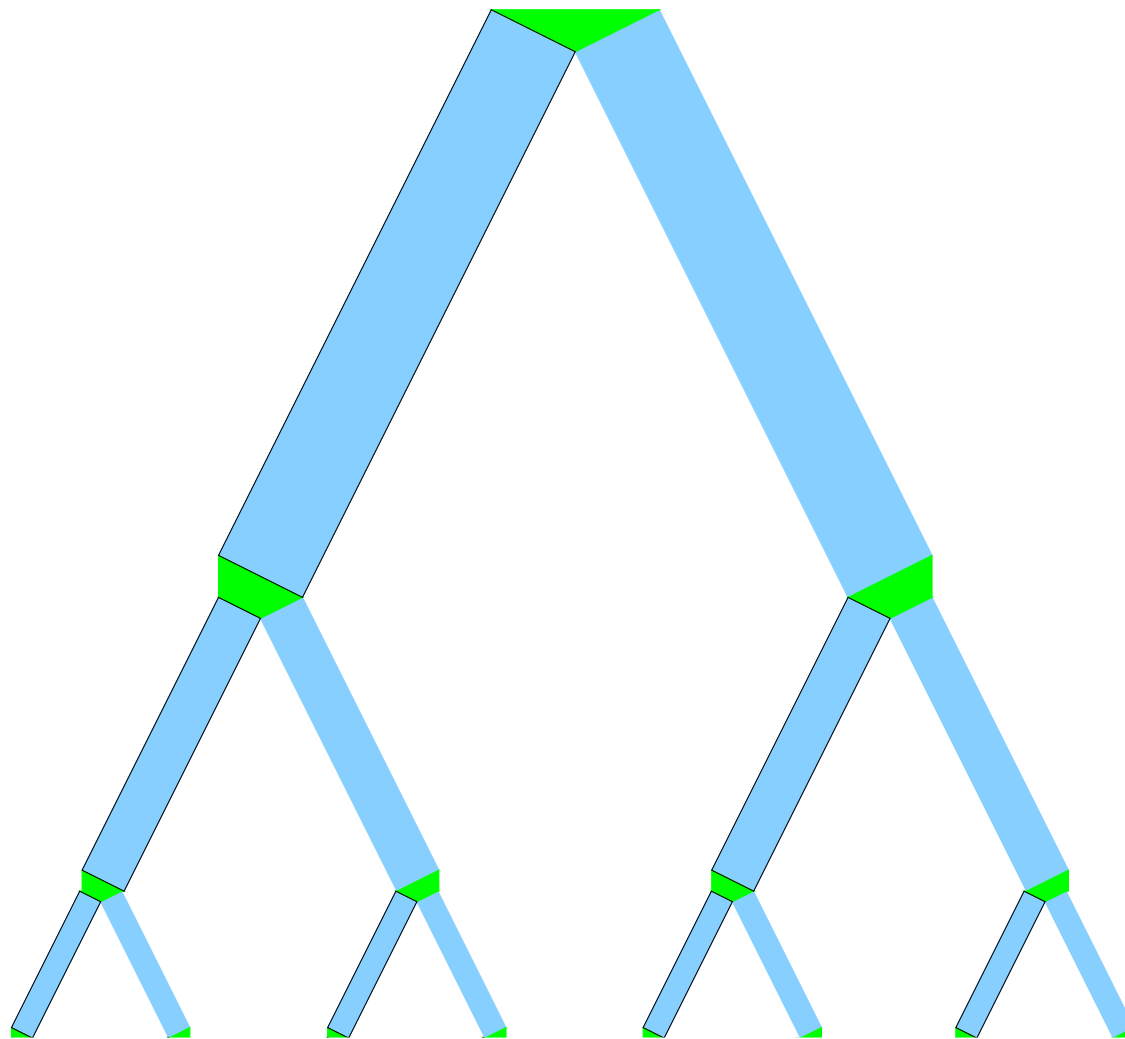


Arbres auto-similaires minces dyadiques.



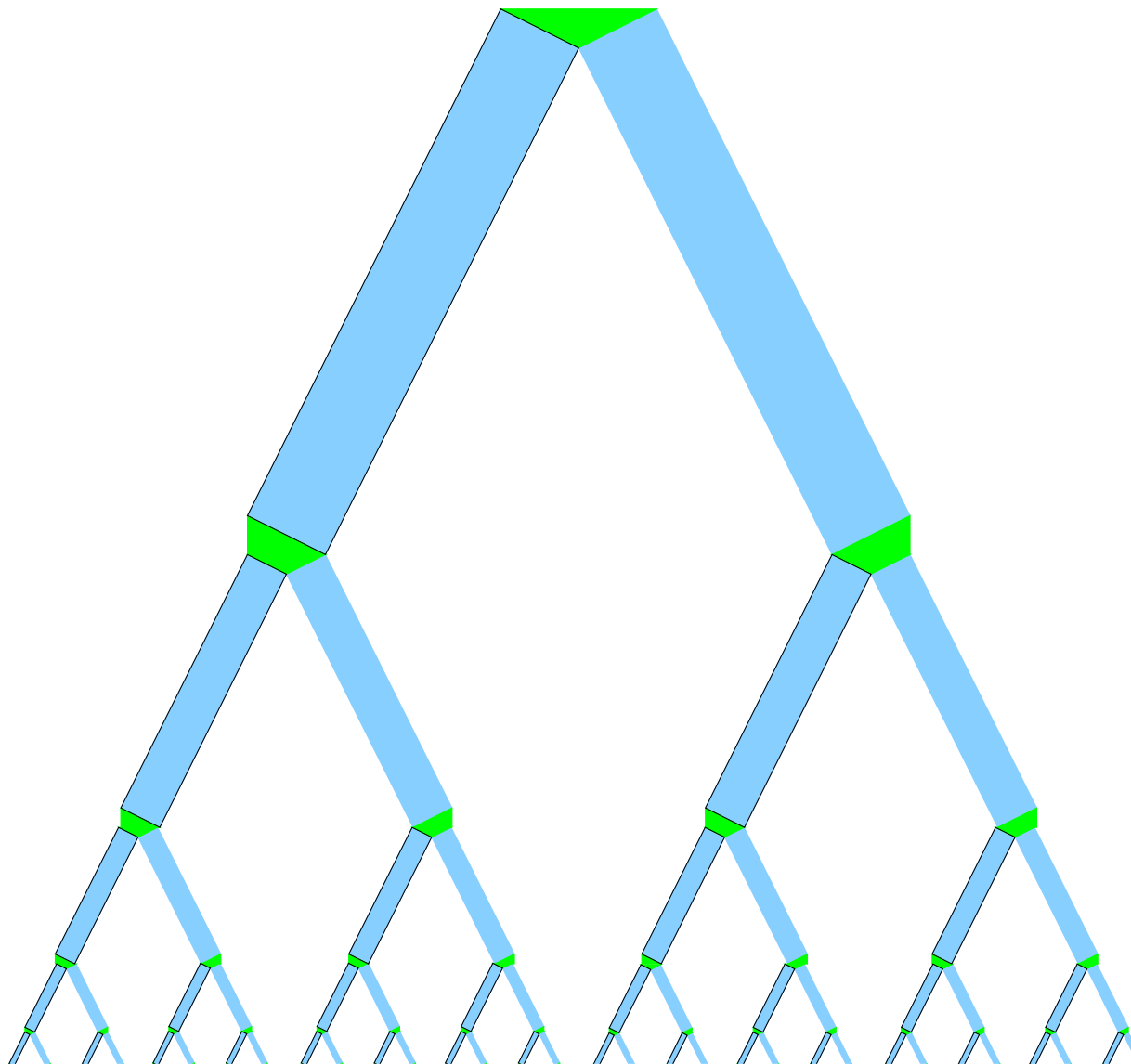


Arbres auto-similaires minces dyadiques.



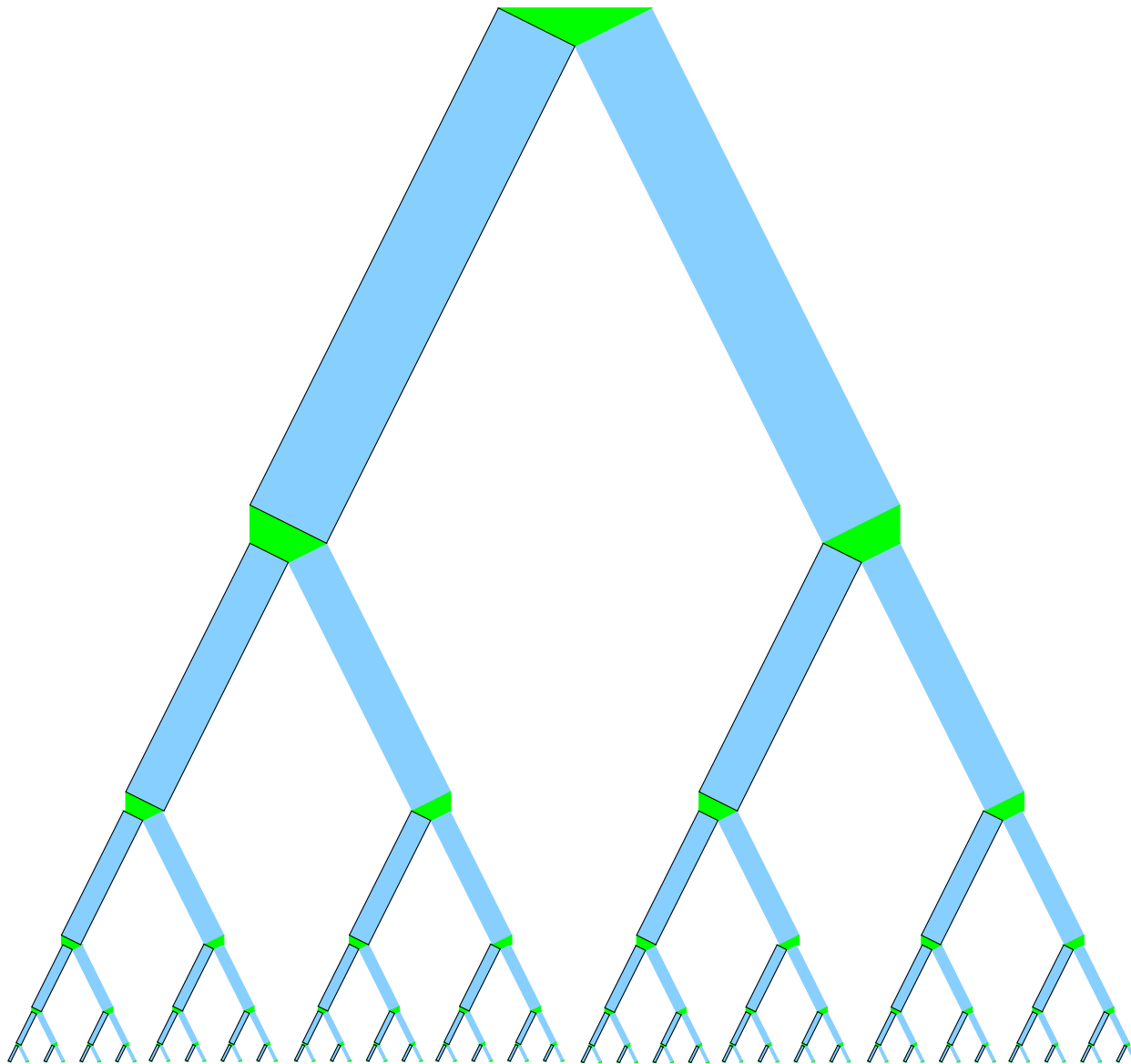


Arbres auto-similaires minces dyadiques.





Arbres auto-similaires minces dyadiques.





Arbres auto-similaires minces dyadiques. (Briane-C)

Soit Q_ε le rectangle $[1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon] \times [1/2, 1]$. Il existe une fonction ϕ_ε continue linéaire par morceaux, égale à x_1 sur Q , supportée par un voisinage de taille $\sqrt{\varepsilon}$ de Q , et telle que

$$\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \|\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Arbres auto-similaires minces dyadiques. (Briane-C)

Soit Q_ε le rectangle $[1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon] \times [1/2, 1]$. Il existe une fonction ϕ_ε continue linéaire par morceaux, égale à x_1 sur Q , supportée par un voisinage de taille $\sqrt{\varepsilon}$ de Q , et telle que

$$\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \|\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

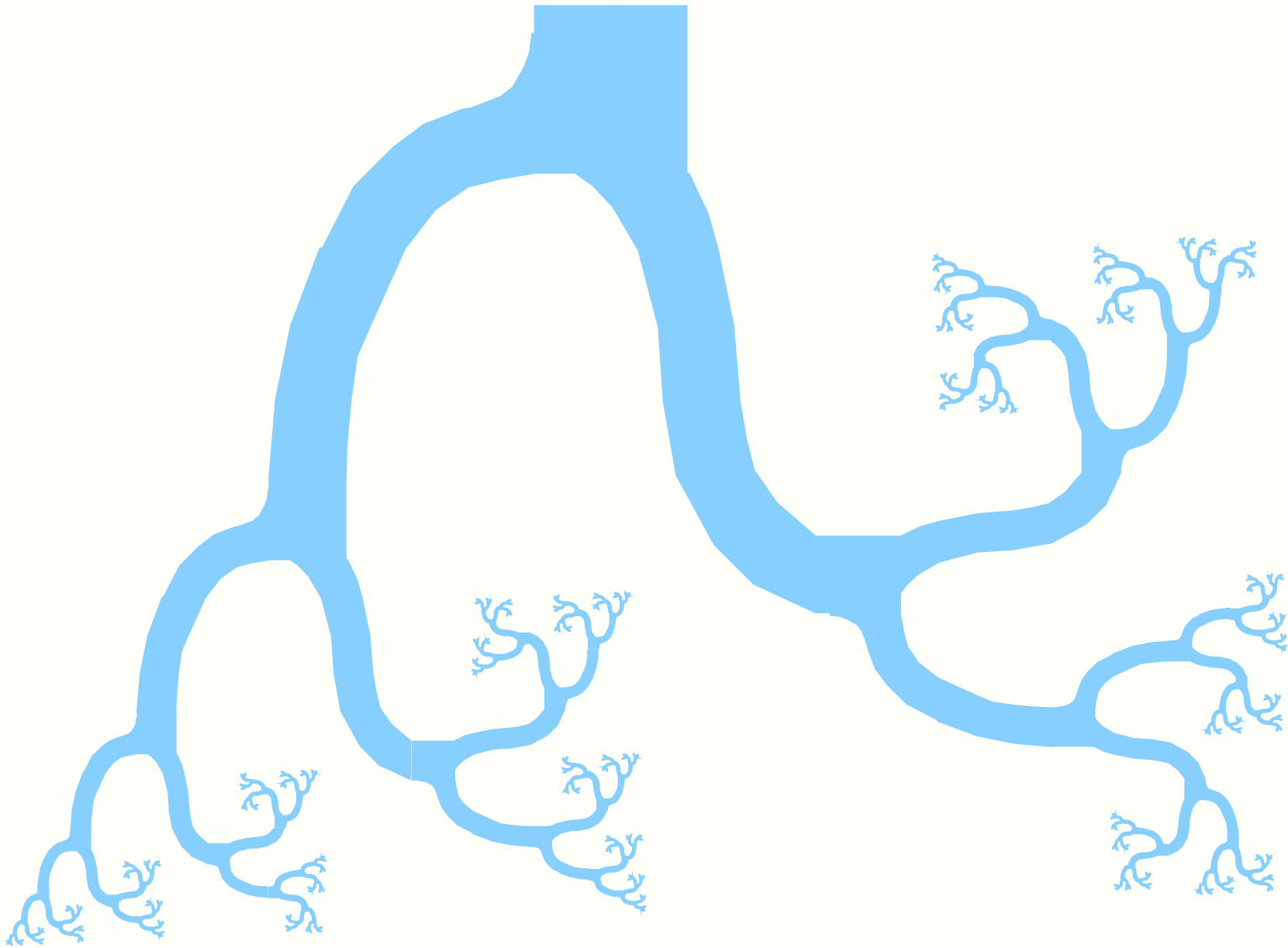
Sur l'arbre dyadique donné par $\mathbf{1}_{T_\varepsilon} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2^k-1} \mathbf{1}_{Q_\varepsilon}(2^{-k}x + j)$ la fonction φ_ε définie à partir de ϕ par

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon &= \phi_\varepsilon(x) + \frac{1}{2} (\phi_\varepsilon(2x) + \phi_\varepsilon(2x - 1)) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\phi_\varepsilon(4x) + \phi_\varepsilon(4x - 1) + \phi_\varepsilon(4x - 2) + \phi_\varepsilon(4x - 3)) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^N} (\phi_\varepsilon(2^N x) + \dots) \end{aligned}$$

vérifie aussi $\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \|\nabla \phi_\varepsilon - \mathbf{1}_{T_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon}$



Arbres auto-similaires minces.



(même résultat)



Merci