

LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS,
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS. FRANCE

*Modèle de deux fluides turbulents.
Unicité de la solution et convergence du schéma
numérique.*

Driss YAKOUBI^a

En collaboration avec : Tomás CHACÓN REBOLLO^{a b} et Stéphane DEL PINO^c.

^aLaboratoire Jacques-Louis LIONS, Université Pierre et Marie Curie, 4 place de Jussieu, 75005 Paris Cedex.

^bDepartamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla.

^cCEA DAM/Île-de-France, Département des Sciences de la Simulation et de l'Information, BP12 91680 Bruyères-le-Châtel.

Plan

Présentation du modèle

Schéma itératif et existence de la solution

Difficultés rencontrées

Théorème de convergence

Théorème d'unicité

Résultats numériques.

Présentation du modèle

Modèle considéré par R.LEWANDOWSKI et aussi B.MOHAMMADI ET O.PIRONNEAU

$$-\operatorname{div}(\alpha_i(k_i)\nabla\mathbf{u}_i) + \operatorname{grad} p_i = \mathbf{f}_i \quad \text{dans } \Omega_i,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i,$$

$$-\operatorname{div}(\gamma_i(k_i)\nabla k_i) = \alpha_i(k_i)|\nabla\mathbf{u}_i|^2 \quad \text{dans } \Omega_i,$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_i,$$

$$k_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i,$$

$$\alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i}\mathbf{u}_i - p_i\mathbf{n}_i + c_i(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, 1 \leq i \neq j \leq 2,$$

$$k_i = \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \quad \text{sur } \Gamma.$$

(1)

— Ω_i borné, convexe de classe $C^{1,1}$ de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 .

— $\partial\Omega_i = \Gamma_i \cup \Gamma$, où

- Γ_i : frontière de *non-glissement* du fluide

- Γ : frontière du *glissement* du fluide modélisée par une friction.

— \mathbf{u}_i : la vitesse, p_i : la pression et k_i : l'énergie cinétique turbulente : ECT .

— $\alpha_i(k_i)$ et $\gamma_i(k_i)$: diffusions turbulentes pour \mathbf{u}_i et k_i .

— $\alpha_i, \gamma_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et

$\forall l \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i(l) \geq \nu, \quad \gamma_i(l) \geq \nu, \quad \nu > 0.$

Schéma itératif :

— $\mathbf{X}_i = \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)^d; \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_i\}$.

— $r, r' > 0$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, avec $r > d$.

Formulation pour l'équation de Stokes

$$\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i, (\alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} + b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{n+1})$$

$$+ c_i(|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{v}_i)_{\Gamma} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i},$$

$$\forall q_i \in L^2(\Omega_i), b_i(\mathbf{u}_i^{n+1}, q_i) = 0,$$

(2)

Formulation pour l'équation d'ECT

$$k_i^{n+1} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_i, \quad k_i^{n+1} = \lambda |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2, \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$\forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i), \quad (\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} = (\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i)_{\Omega_i}. \quad (3)$$

- La preuve de l'existence d'une solution du problème (2)-(3) dans l'espace $\mathbf{X}_i \times L^2(\Omega_i) \times W_0^{1,r'}(\Omega_i)$ est due à R. LEWANDOWSKI
- k_i reste positive sur Ω_i .

Difficultés :

- $|\nabla \mathbf{u}_i|^2 \in L^1(\Omega_i)^d$
- Terme ECT sur l'interface Γ : $k_i = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ sur Γ .

Solutions proposées :

- Plus de régularité pour la vitesse et l'énergie
- Schéma converge sous certaines conditions
- Introduction d'un relèvement harmonique noté R_i .

Théorème de convergence :

Soit $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$, si la suite $\mathbf{u}_i^n \in W^{1,3+\epsilon}(\Omega_i)^d$ et est bornée dans $W^{1,3}(\Omega_i)^d$

Alors

$$\|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \leq K \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0$$

et

$$\|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \leq K \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0.$$

Où $K^2 = \frac{C}{\nu} (1 + \frac{1}{\nu^2})$.

Et si $K < 1$, Alors le schéma itératif (2)-(3) est **contractant**.

Théorème d'unicité :

Soit $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$. S'il existe $\mathbf{U}_i = (\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$ et $\bar{\mathbf{U}}_i = (\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{p}_i, \bar{k}_i)$ deux solutions du problème (1) appartenant à $W^{1,3+\epsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W_0^{1,3}(\Omega)$.

Alors

$$\|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_i - \mathbf{u}_i)\|_0 \leq K \|\nabla(\bar{k}_i - k_i)\|_0 \text{ et}$$

$$\|\nabla(\bar{k}_i - k_i)\|_0 \leq K \|\nabla(\bar{k}_i - k_i)\|_0.$$

Si $K < 1$, alors $\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i$.

Preuve du théorème de convergence :

— Estimation Vitesse-Energie :

$$\|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \leq \frac{c}{\nu^2} \|\alpha'_i\|_\infty \|\mathbf{f}_i\|_0 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0. \quad (4)$$

Estimation de $\|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0$:

— $\varphi_i = k_i^{n+1} - k_i^n - R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)$ dans l'équation ECT aux étapes n et $n + 1$,

— Faire apparaître $k_i^n - k_i^{n-1} \rightarrow 7$ intégrales à estimer,

— Estimations grâce à : Injections de Sobolev, relèvement harmonique et au Théorème suivant :

Théorème :

Ω borné, convexe ou de classe $C^{1,1}$ de \mathbb{R}^d .

$p > d$.

La forme bilinéaire

$$\Phi : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \rightarrow H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \text{ est } \textit{continue}.$$

— Ce résultat est une conséquence directe d'un théorème de **P.GRISVARD** en prenant $p = 3 + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

Passage à la limite :

- La convergence de la suite p_i^n se fait grâce à la condition inf-sup
- Le passage à la limite se fait facilement grâce aux convergences fortes des suites \mathbf{u}_i^n , k_i^n et p_i^n
- La limite est l'unique solution du problème (2)-(3).

Preuve du théorème d'unicité :

La preuve du théorème se fait en utilisant des estimations semblables à celles de la preuve du théorème de convergence.

Résultats numériques :

— L'objectif : **couplage océan/atmosphère**

— Pour le calcul :

$\Omega_1 =]0,5[\times]0,1[\times]0,1[$ pour l'atmosphère

$\Omega_2 =]0,5[\times]-1,0[\times]0,1[$ pour l'océan

— Les constantes numériques de frictions et génération d'énergie

(réalistes) : $c_i = 10^{-3}$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$

— Coefficients de diffusion et de viscosité :

$$\gamma_1(k_1) = \alpha_1(k_1) = 3 \cdot 10^{-3} + 0,277 \cdot 10^{-4} \sqrt{k_1},$$

$$\gamma_2(k_2) = \alpha_2(k_2) = 3 \cdot 10^{-2} + 0,185 \cdot 10^{-5} \sqrt{k_2}.$$

Méthode numérique et logiciel utilisés :

— On impose $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ sur la frontière $y = 1$
et $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ sur le reste de $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

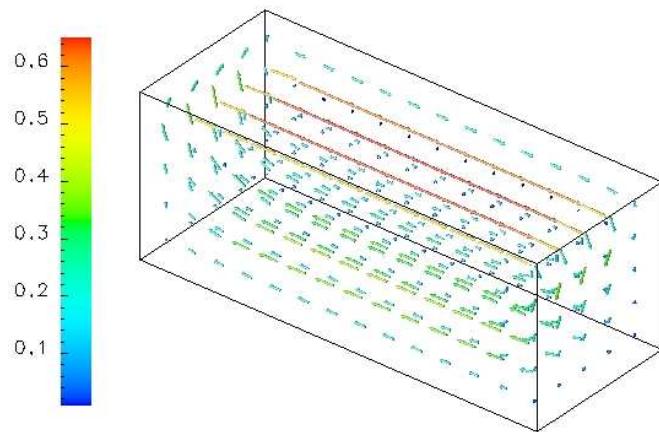
— Résultats obtenus avec le logiciel **FreeFEM3D**

[http : //www.freefem.org/ff3d](http://www.freefem.org/ff3d).

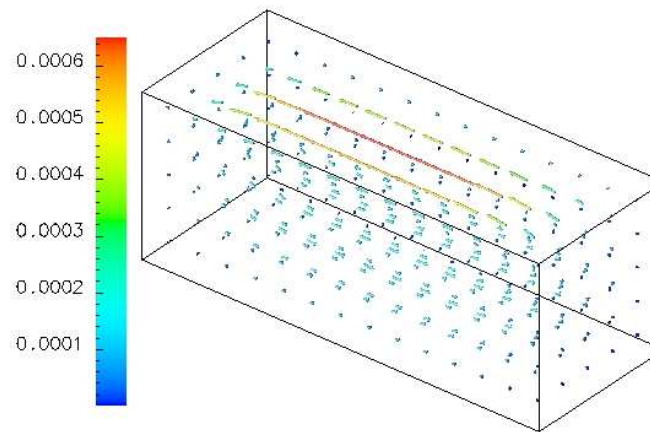
— Discrétisation $Q_1 - Q_1$ stabilisée par pénalisation sur la pression.

— Le maillage de chaque domaine est $50 \times 20 \times 20$,

— On remplace $|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|$ par $|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|$ dans (2) \rightarrow *méthode explicite*.

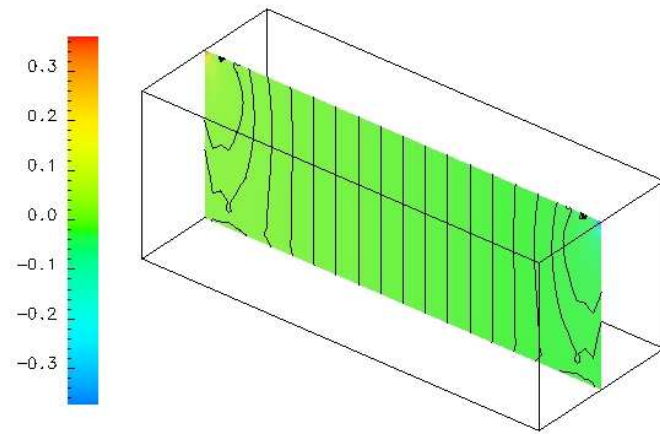


(a) partie atmospherique

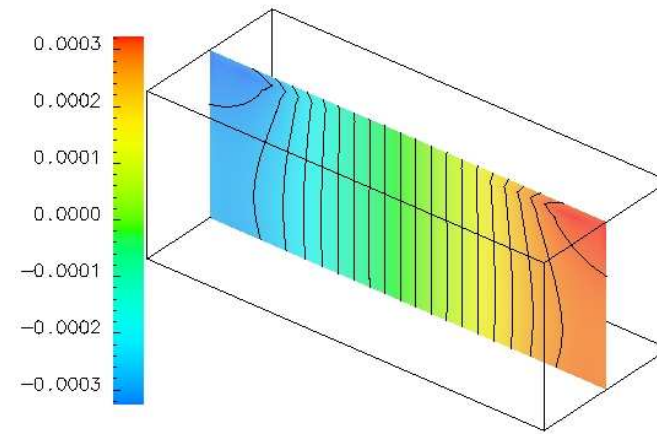


(b) partie océanique

FIG. 1 – *Champs de vitesses*

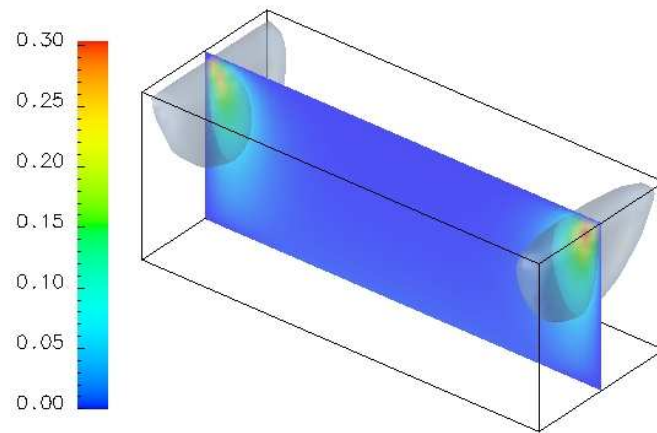


(a) partie atmosphérique

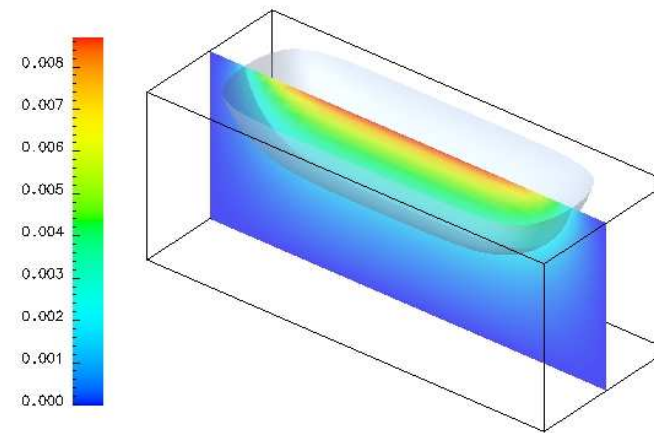


(b) partie océanique

FIG. 2 – *Pressions*



(a) partie atmosphérique



(b) partie océanique

FIG. 3 – *Energies cinétiques turbulentes*

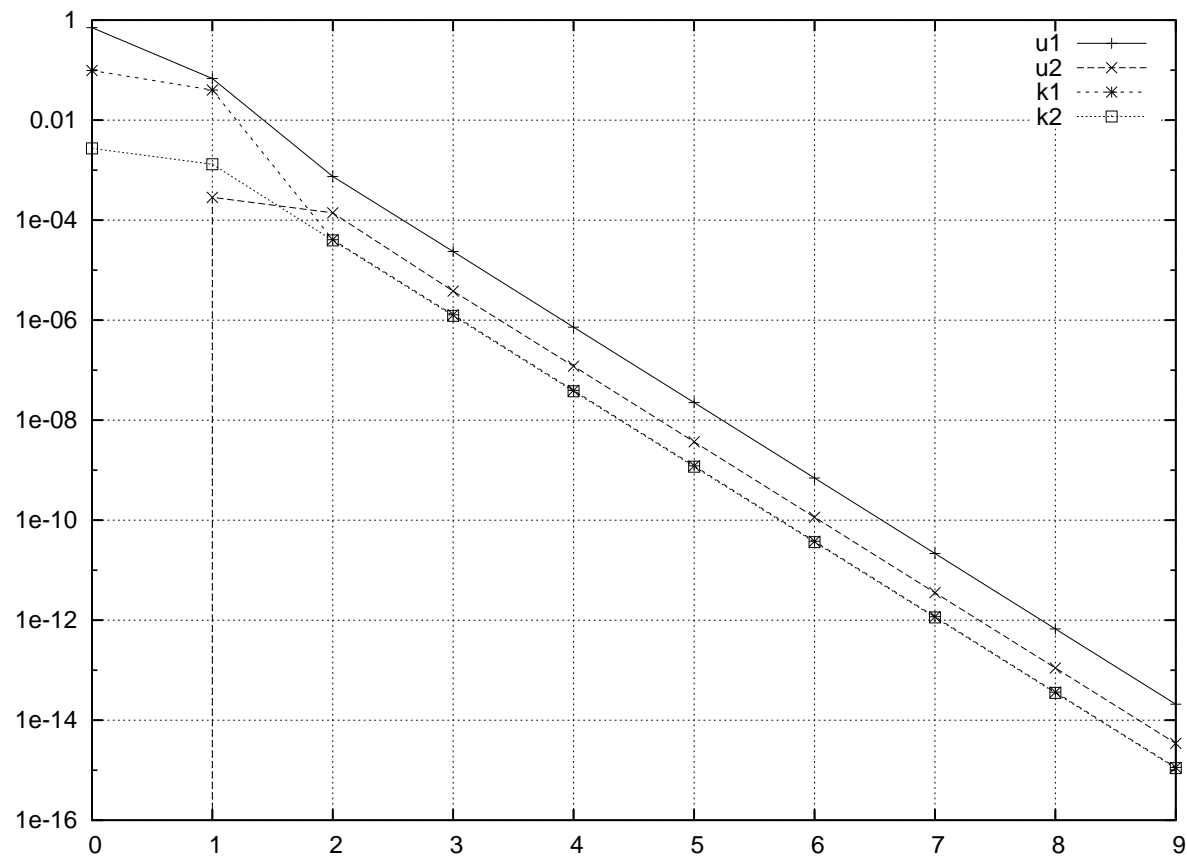


FIG. 4 – *Convergence en norme L^2 des u_i et k_i en fonction du numéro de l'itération. Échelle logarithmique.*

Interprétation :

— La figure 1 représente le résultat attendu, à savoir une *cavité entraînée* dont la rotation s'effectue dans le sens contraire de celle imposée dans l'atmosphère.

— Sur la figure 4 on observe une *convergence exponentielle* de la solution en fonction du nombre d'itération (l'erreur mesurée est la norme L^2 de la différence entre deux itérés). Ceci illustre l'efficacité de l'algorithme proposé.