

Schémas numériques pour les problèmes faiblement bien posés

Sabrina PETIT

LAGA - Université Paris 13
Directrice de thèse : Laurence HALPERN

1^{er} juin 2006

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

Problème **fortement** bien posé

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

Problème **fortement** bien posé

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Splitting ↓

$$\begin{cases} \partial_t U_1 + A_1 \partial_x (U_1 + U_2) & = 0 \\ \partial_t U_2 + A_2 \partial_y (U_1 + U_2) & = 0 \end{cases}$$

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

Problème **fortement** bien posé

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Splitting ↓ *Absorption*

$$\begin{cases} \partial_t U_1 + A_1 \partial_x (U_1 + U_2) + \sigma_x U_1 = 0 \\ \partial_t U_2 + A_2 \partial_y (U_1 + U_2) + \sigma_y U_2 = 0 \end{cases}$$

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

Problème **fortement** bien posé

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Splitting ↓ *Absorption*

$$\begin{cases} \partial_t U_1 + A_1 \partial_x (U_1 + U_2) + \sigma_x U_1 = 0 \\ \partial_t U_2 + A_2 \partial_y (U_1 + U_2) + \sigma_y U_2 = 0 \end{cases}$$

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{H^{q_1}(\mathbb{R})}$$

Motivations : Les PML

Perfectly Matched Layers (Bérenger 1994)

Problème **fortement** bien posé

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\partial_t U + A_1 \partial_x U + A_2 \partial_y U = 0$$

Splitting ↓ *Absorption*

$$\begin{cases} \partial_t U_1 + A_1 \partial_x (U_1 + U_2) + \sigma_x U_1 = 0 \\ \partial_t U_2 + A_2 \partial_y (U_1 + U_2) + \sigma_y U_2 = 0 \end{cases}$$

Problème **faiblement** bien posé

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{H^{q_1}(\mathbb{R})}$$

Motivations

Application : Etude de la propagation d'ondes électromagnétiques en domaine non borné.

Discrétisation : Schéma de Yee.

Motivations

Application : Etude de la propagation d'ondes électromagnétiques en domaine non borné.

Discrétisation : Schéma de Yee.

Problème : Croissance linéaire de la norme des puissances $n^{\text{ième}}$ de la matrice d'amplification du schéma de Yee

→ **Instabilité au sens classique.**

Motivations

Application : Etude de la propagation d'ondes électromagnétiques en domaine non borné.

Discrétisation : Schéma de Yee.

Problème : Croissance linéaire de la norme des puissances $n^{\text{ième}}$ de la matrice d'amplification du schéma de Yee

→ **Instabilité au sens classique.**

Références :

BERENGER, JEAN-PIERRE, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 1994.

ABARBANEL, SAUL AND GOTTLIEB, DAVID,, *A mathematical analysis of the PML method*, J. Comput. Phys., 134, 1997, 2, 357–363.

Plan de l'exposé

- 1 Nouvelles définitions
- 2 Analogie du théorème de Lax-Richtmyer
- 3 Taux de convergence
- 4 Etude d'un exemple
- 5 Conclusion et perspectives

Notations

Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) + A \partial_x U(t, x) + BU(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ U(0, x) = U^0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $U(t, x), U^0(x) \in \mathbb{R}^N, A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

Notations

Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) + A \partial_x U(t, x) + BU(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ U(0, x) = U^0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $U(t, x), U^0(x) \in \mathbb{R}^N, A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

Schéma à un pas en temps

$$Q_{-1} V^{n+1} = Q_0 V^n$$

avec $(Q_\sigma V^n)_j = \sum_{\nu=-r}^p A_{\nu\sigma} V_{j-\nu}^{n-\sigma}$ pour $\sigma \in \{-1, 0\}$

Notations

Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) + A \partial_x U(t, x) + BU(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ U(0, x) = U^0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $U(t, x), U^0(x) \in \mathbb{R}^N, A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

Schéma à un pas en temps

$$Q_{-1} V^{n+1} = Q_0 V^n$$

avec $(Q_\sigma V^n)_j = \sum_{\nu=-r}^p A_{\nu\sigma} V_{j-\nu}^{n-\sigma}$ pour $\sigma \in \{-1, 0\}$

Matrice d'amplification du schéma

$$\widehat{Q} = (\widehat{Q}_{-1})^{-1} \widehat{Q}_0$$

où $\widehat{Q}_\sigma(\xi) = \sum_{\nu=-r}^p A_{\nu,\sigma} e^{i\nu\xi\Delta x}$

Nouvelles définitions

Stabilité faible

Le schéma est **faiblement stable de défaut** q_2 si :

$$\exists C, \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], \quad \|(\widehat{Q}_{-1})^{-1}\| \leq C, \text{ et}$$

$$\exists K_S, \exists \alpha_S, \forall n, t_n \in [0, T], \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], \quad \|\widehat{Q}^n(\xi)\| \leq K_S e^{\alpha_S t_n} (1 + |\xi|^{q_2}).$$

Rappels :

- $Q_{-1} V^{n+1} = Q_0 V^n$
avec $(Q_\sigma V^n)_j = \sum_{\nu=-r}^p A_{\nu\sigma} V_{j-\nu}^{n-\sigma}$ pour $\sigma \in \{-1, 0\}$
- $\widehat{Q} = (\widehat{Q}_{-1})^{-1} \widehat{Q}_0$
où $\widehat{Q}_\sigma(\xi) = \sum_{\nu=-r}^p A_{\nu,\sigma} e^{i\nu\xi\Delta x}$

Nouvelles définitions

Stabilité faible

Le schéma est **faiblement stable de défaut** q_2 si :

$$\exists C, \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], \quad \|(\widehat{Q}_{-1})^{-1}\| \leq C, \text{ et}$$

$$\exists K_S, \exists \alpha_S, \forall n, t_n \in [0, T], \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], \quad \|\widehat{Q}^n(\xi)\| \leq K_S e^{\alpha_S t_n} (1 + |\xi|^{q_2}).$$

Consistance faible

Si U est la solution continue du problème de Cauchy de donnée initiale U^0 , on définit l'erreur de troncature $\tau^n(U^0)$ par :

$$\Delta t \cdot \tau_j^n(U^0) = Q_{-1}U(x_j, t_{n+1}) - Q_0U(x_j, t_n).$$

Le schéma est dit **q_3 -consistant de régularité** θ , si pour tout $U^0 \in H^\theta(\mathbb{R})$:

$$\|\tau^n(U^0)\|_{h, q_3} \leq L(t_n) \varepsilon(\Delta x, \Delta t)$$

où $L(t_n)$ est borné sur tout intervalle fini et $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta t) = 0$.

Nouvelles définitions

Si $V \in L^2(h\mathbb{Z})$, on définit son interpolée $SV \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$SV(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{ix\xi} \widehat{V}(\xi) d\xi.$$

Convergence

Le schéma est dit **q_4 -convergent** si pour tout $U^0 \in H^{q_4}(\mathbb{R})$, pour tout V^0 tel que $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|SV^0 - U^0\|_{H^{q_4}(\mathbb{R})} = 0$, on a :

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|U(t_n, \cdot) - SV^n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

Si $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on définit son évaluée aux points de la grille par :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad (EU)_j = U(x_j) = U(j\Delta x).$$

Analogie du théorème de Lax-Richtmyer

Condition suffisante de convergence

- Si le problème de Cauchy est **faiblement bien posé** de défaut q_1
- Si le schéma est faiblement **stable** de défaut q_2
- Si le schéma est q_3 -**consistant** de régularité θ avec $q_3 \geq q_2 > \frac{1}{2}$

Alors le schéma est q_4 **convergent** avec $q_4 > \max(\frac{1}{2} + q_1, q_2)$ et $q_4 \geq \theta$.

Analogie du théorème de Lax-Richtmyer

Condition suffisante de convergence

- Si le problème de Cauchy est **faiblement bien posé** de défaut q_1
- Si le schéma est faiblement **stable** de défaut q_2
- Si le schéma est q_3 -**consistant** de régularité θ avec $q_3 \geq q_2 > \frac{1}{2}$

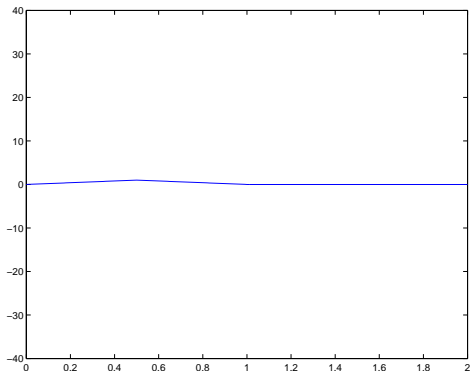
Alors le schéma est q_4 **convergent** avec $q_4 > \max(\frac{1}{2} + q_1, q_2)$ et $q_4 \geq \theta$.

Condition nécessaire de convergence

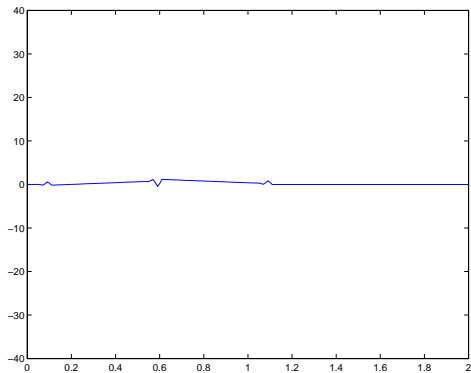
- Si le problème est **faiblement bien posé** de défaut q_1
- Si le schéma est q_4 -**convergent**

Alors, il est **stable** de défaut $q_2 \geq q_1$.

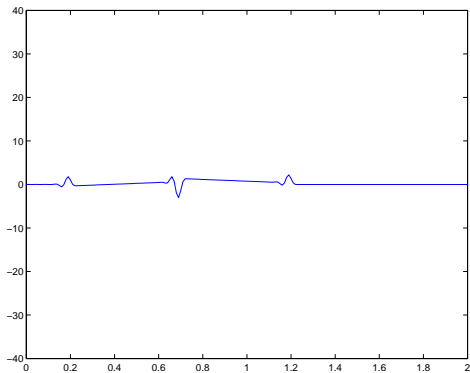
Cas d'une donnée initiale peu régulière



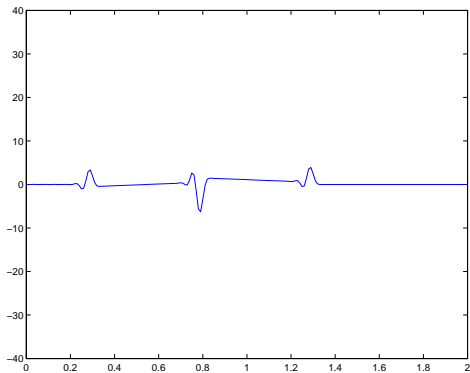
Cas d'une donnée initiale peu régulière



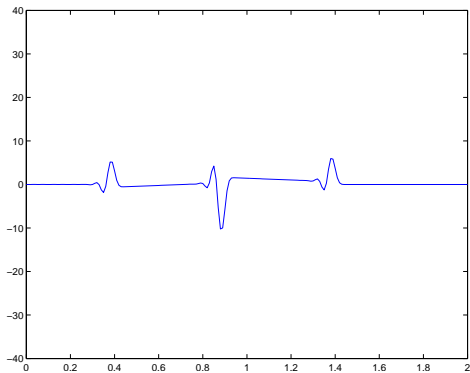
Cas d'une donnée initiale peu régulière



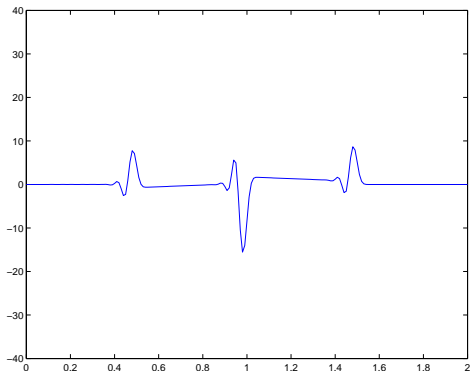
Cas d'une donnée initiale peu régulière



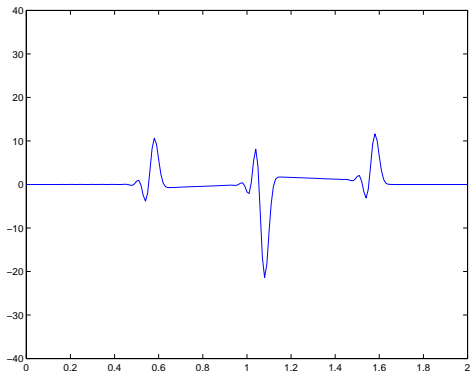
Cas d'une donnée initiale peu régulière



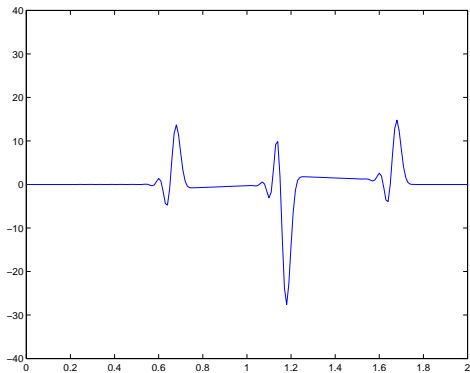
Cas d'une donnée initiale peu régulière



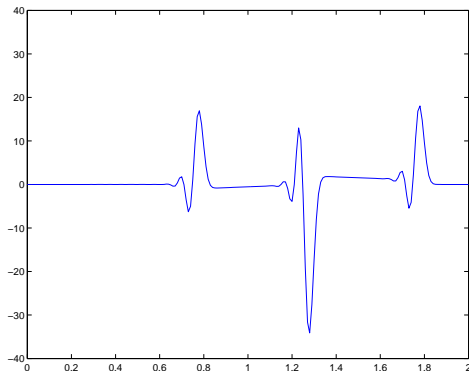
Cas d'une donnée initiale peu régulière



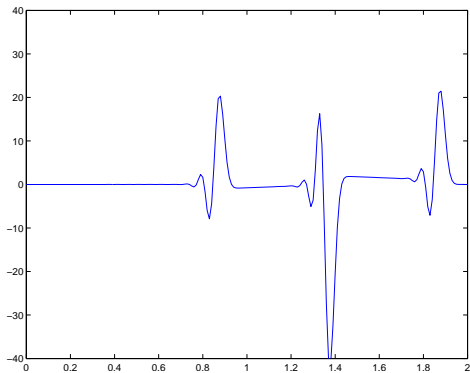
Cas d'une donnée initiale peu régulière



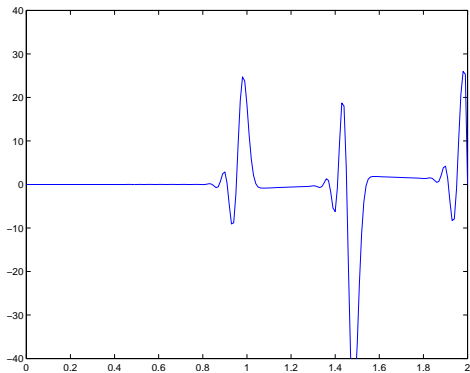
Cas d'une donnée initiale peu régulière



Cas d'une donnée initiale peu régulière



Cas d'une donnée initiale peu régulière



Taux de convergence

Convergence

Le schéma est dit **q_4 -convergent** si pour tout $U^0 \in H^{q_4}(\mathbb{R})$, pour tout V^0 tel que $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|SV^0 - U^0\|_{H^{q_4}(\mathbb{R})} = 0$, on a :

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|U(t_n, \cdot) - SV^n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

Taux de convergence

Convergence

Le schéma est dit **q_4 -convergent** si pour tout $U^0 \in H^{q_4}(\mathbb{R})$, pour tout V^0 tel que $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|SV^0 - U^0\|_{H^{q_4}(\mathbb{R})} = 0$, on a :

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|U(t_n, \cdot) - SV^n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

$$\|EU(t_n, \cdot) - V^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})}$$

Taux de convergence

Convergence

Le schéma est dit **q_4 -convergent** si pour tout $U^0 \in H^{q_4}(\mathbb{R})$, pour tout V^0 tel que $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|SV^0 - U^0\|_{H^{q_4}(\mathbb{R})} = 0$, on a :

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|U(t_n, \cdot) - SV^n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

Alors : $\exists K, \alpha', \forall U^0 \in H^{q_4}(\mathbb{R})$,

$$\|EU(t_n, \cdot) - V^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} \leq Ke^{\alpha' t_n} t_n \Delta x^{\beta_1} \|U^0\|_{H^{q_4}}$$

Taux de convergence

Hypothèses :

- Problème de Cauchy faiblement bien posé de défaut q_1 .
- Schéma faiblement stable de défaut q_2 .
- Condition initiale du schéma $V^0 = EU^0 \in L^2(h\mathbb{Z})$.
- $\left\| e^{P(i\xi)t_n} - \widehat{Q}^n(\xi) \right\|_2 \leq Ct_n \Delta x^s (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}$.
- $\max(q_1, q_2) < q_4 - \frac{1}{2}$ et $s \leq \max(q_4, \sigma) - \max(q_1, q_2)$.

Alors : $\exists K, \alpha', \forall U^0 \in H^{q_4}(\mathbb{R})$,

$$\|EU(t_n, \cdot) - V^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} \leq Ke^{\alpha' t_n} t_n \Delta x^{\beta_1} \|U^0\|_{H^{q_4}}$$

où :

$$\beta_1 = \frac{s(q_4 - \max(q_1, q_2))}{\max(q_4, \sigma) - \max(q_1, q_2)}$$

Evaluation de σ

Si on a :

$$\left\| \frac{e^{P(i\xi)\Delta t} - \hat{Q}(\xi)}{\Delta t} \right\| \leq C \Delta x^r (1 + |\xi|^2)^{\rho/2}$$

Rappel : $\left\| e^{P(i\xi)t_n} - \widehat{Q}^n(\xi) \right\|_2 \leq C t_n \Delta x^s (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}$

Evaluation de σ

Si on a :

$$\left\| \frac{e^{P(i\xi)\Delta t} - \hat{Q}(\xi)}{\Delta t} \right\| \leq C \Delta x^r (1 + |\xi|^2)^{\rho/2}$$

alors, on peut prendre :

$$s = r \text{ et } \sigma = \rho + q_1 + q_2$$

On obtient alors le taux de convergence :

$$\beta_2 = \frac{r(q_4 - \max(q_1, q_2))}{\max(q_4, \rho + q_1 + q_2) - \max(q_1, q_2)}$$

Rappel : $\left\| e^{P(i\xi)t_n} - \widehat{Q}^n(\xi) \right\|_2 \leq C t_n \Delta x^s (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}$

Ecriture du schéma

Schéma de Lax-Wendroff modifié pour l'équation $\partial_t U + A\partial_x U + BU = 0$

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \left(A - \frac{\Delta t}{2}(AB + BA)\right) \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2} A^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ + \left(I - \frac{\Delta t}{2}B\right) B \frac{U_{j+1}^n + 2U_j^n + U_{j-1}^n}{4} = 0. \end{aligned}$$

Ecriture du schéma

Schéma de Lax-Wendroff modifié pour l'équation $\partial_t U + A\partial_x U + BU = 0$

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \left(A - \frac{\Delta t}{2}(AB + BA) \right) \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2} A^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ + \left(I - \frac{\Delta t}{2} B \right) B \frac{U_{j+1}^n + 2U_j^n + U_{j-1}^n}{4} = 0. \end{aligned}$$

Matrice d'amplification

$$\hat{Q}(\xi) = I - \Delta t \cos\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) P(z) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\cos\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \right)^2 P(z)^2$$

$$\text{où } z = \frac{2i}{\Delta x} \tan\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right).$$

Etude de la stabilité faible

Proposition

Si le problème continu est faiblement bien posé, alors le schéma de Lax-Wendroff modifié est faiblement stable sous condition CFL :

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \quad \left| \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

Résultats utilisés :

- Supposons qu'il existe $K > 0$, $\theta \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$, on ait $\|\widehat{Q}(\xi) - Id\| \leq K\Delta t(1 + |\xi|^\theta)$. Alors le schéma est stable si et seulement si les valeurs propres $\lambda(\xi)$ de $\widehat{Q}(\xi)$ vérifient

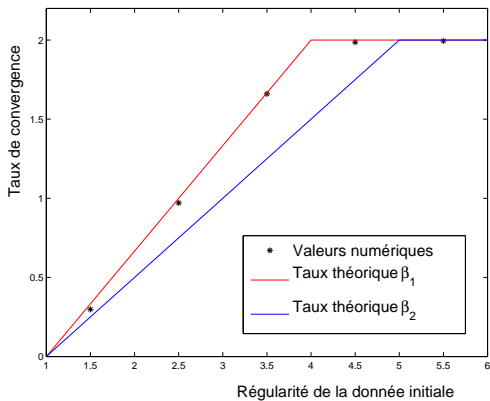
$$\forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right], \quad |\lambda(\xi)| \leq e^{\alpha_s \Delta t}.$$

- Le problème de Cauchy de symbole $P(i\xi)$ est faiblement bien posé si et seulement si

$$\exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > C, \forall \lambda(z) \in \sigma(P(z)), \quad \lambda(z) = \lambda_0 z + f_\lambda(z),$$

où f_λ est bornée sur $|z| > C$ et $\lambda_0 \in \sigma(A)$.

Résultats numériques



Taux de convergence optimal

Proposition

Pour un schéma de Lax-Wendroff modifié, on peut prendre :

$$s = 2$$

$$\sigma = 3 + \max(q_1, q_2)$$

Rappel : On peut aussi prendre :

$$s = 2 \text{ et } \sigma = 3 + q_1 + q_2$$

Taux de convergence optimal

Proposition

Pour un schéma de Lax-Wendroff modifié, on peut prendre :

$$s = 2$$

$$\sigma = 3 + \max(q_1, q_2)$$

Avec ces valeurs les taux de convergence numérique et théorique sont proches.

Rappel : On peut aussi prendre :

$$s = 2 \text{ et } \sigma = 3 + q_1 + q_2$$

Conclusion et perspectives

Conclusion

- Calcul du taux de convergence optimal pour certains schémas
- Calcul d'un taux de convergence minimal dans tous les cas

Conclusion et perspectives

Conclusion

- Calcul du taux de convergence optimal pour certains schémas
- Calcul d'un taux de convergence minimal dans tous les cas

Perspectives

- Discrétisation de problèmes faiblement bien posés dans le cas multi-dimensionnel
- Etude du problème aux limites discret