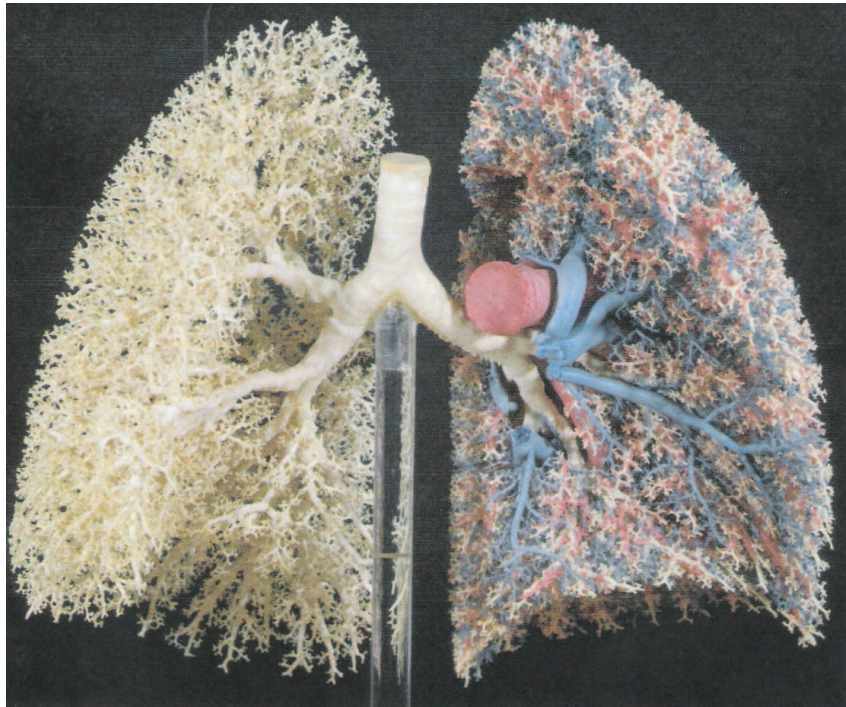


Modélisation multimodèle de l'écoulement de l'air dans les poumons humains

CÉLINE GRANDMONT¹, BERTRAND MAURY², ASSIA SOUALAH³

¹ CEREMADE, Université de Paris Dauphine

^{2,3} Laboratoire de Mathématiques, Université de Paris-Sud



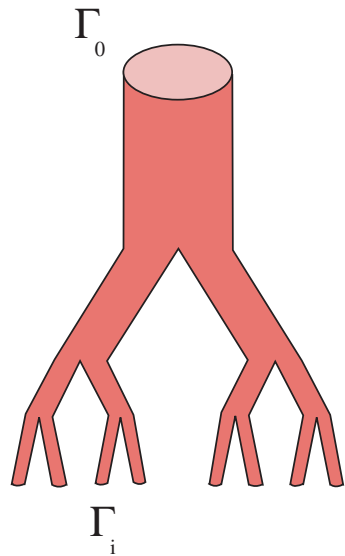
De la génération 0 à la génération 5 :
écoulement de Navier-Stokes.

De la génération 6 à la génération 16 :
écoulement laminaire régi par les
équations de Stokes (Poiseuille).

De la génération 17 à la génération 23 :
les acini (sacs alvéolaires).

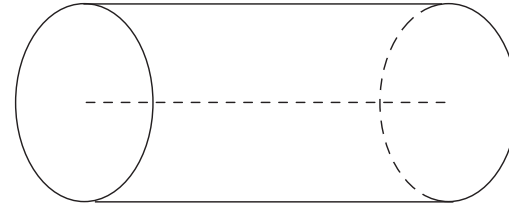
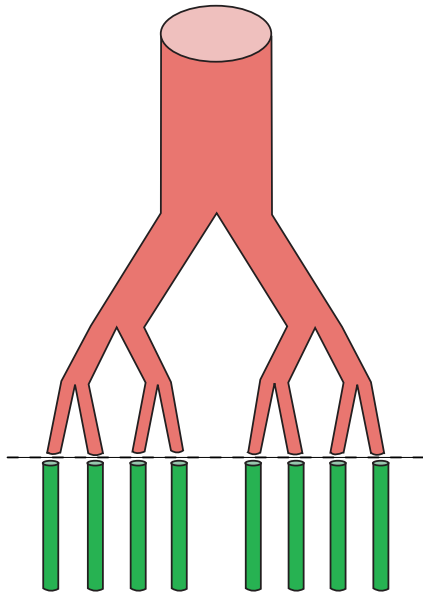
Simulation directe des équations de Navier-Stokes :

le champ de vitesse \mathbf{u} et le champ de pression p vérifient



Le domaine Ω

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} &= -P_0 \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_0 \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} &= -\pi_i \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_i, \\ &&& i = 1, N \end{aligned}$$



$$P_{in} - P_{out} = RQ$$

On condense chaque sous arbre en un tube équivalent, grâce à la linéarité de la loi de Poiseuille et par analogie avec un réseau électrique

$$\pi_i - P_i = R_i Q_i \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, N$$

où $Q_i = \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ et R_i est la résistance équivalente au sous arbre s'étendant entre les générations 6 et 16

Couplage avec un modèle masse-ressort :

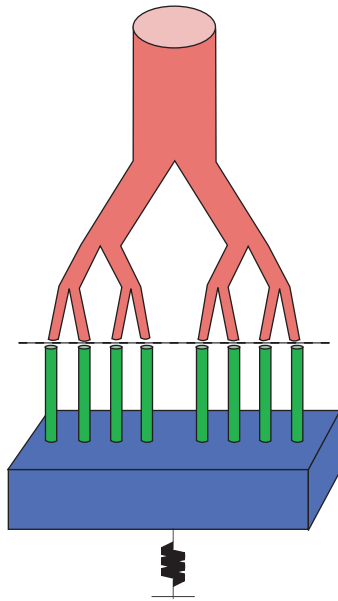
$x(t)$ la position de la paroi au cours du temps

m la masse de la paroi

f_r la force de pression

f_{ext} une force extérieure (musculaire)

$-kx$ la force de rappel élastique



$$m\ddot{x} + kx = f_{ext} + f_r$$

La pression à chaque instant est uniforme dans la boîte :

$$P_i = P \quad \forall i = 1, N \quad \text{et} \quad f_r = PS$$

où S est l'aire de la paroi.

Le parenchyme est supposé incompressible et les bronches rigides :

$$S\dot{x} = \sum_{i=1}^N Q_i = -Q_0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i \\ & i = 1, N \end{array} \right.$$

où $R_i > 0$ et la pression P_i est donnée par

$$P_i = \frac{1}{S} (m\ddot{x} + kx - f_{ext})$$

et avec

$$S\dot{x} = \sum_{i=1}^N Q_i = -Q_0$$

Le modèle permet de reproduire l'écoulement de l'air dans un arbre bronchique en limitant la résolution directe aux premières générations de bronches et évitant ainsi le maillage de la partie géométriquement complexe de l'arbre.

Traitement du terme non linéaire afin de montrer que le système global est stable en temps :

- introduire une pression dynamique $\overline{P}_i = P_i + \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2$, comme dans [Grandmont, Maday, Maury](2005), conduirait à modifier les conditions aux bords.
- exploiter des inégalités fonctionnelles relatives à l'opérateur de Stokes avec conditions de Newman, comme dans [Quarteroni, Veneziani](2003), et montrer que le système global est stable si $\mu - C \max_i R_i > 0$, où C est une constante qui dépend du domaine. Toutefois cette condition semble être rédhibitoire, car $\mu \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$ tandis que $R_i = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Pa/m}^3 \text{ s}^{-1}$.

On se donne des profils de vitesses \mathbf{U}_i dans $H^{1/2}(\Gamma_i)$ pour $i = 0, \dots, N$.

On suppose que $\mathbf{u}|_{\Gamma_i} = \lambda_i \mathbf{U}_i$ pour $i = 0, \dots, N$, où les λ_i sont quelconque dans \mathbb{R} .

$\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ désigne un vecteur de R^{N+1} .

Soit $H_0^1(\Omega)^d$ l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)^d$ à trace nulle sur Γ_l .
 $d = 2, 3$.

On introduit les espaces fonctionnels

$$W = \{(\mathbf{u}, \Lambda) \in H_0^1(\Omega)^d \times R^{N+1}, \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i \quad i = 0, \dots, N\},$$

et $M = L^2(\Omega)$.

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\
 \mathbf{u} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Gamma_l \\
 \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i & \text{sur }]0, T[\times \Gamma_i \\
 & i = 0, \dots, N \\
 \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 = -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} & \text{sur }]0, T[\times \Gamma_0 \\
 \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i = -P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - \lambda_i R_i \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 & \text{sur }]0, T[\times \Gamma_i \\
 & i = 1, \dots, N
 \end{array} \right.$$

avec $P_i = \frac{1}{S} (m\ddot{x} + kx - f_{ext})$ et $S\dot{x} = \sum_{i=1}^N Q_i = -Q_0$

Il s'agit de conditions plus restrictives, mais en se limitant à un seul degré de liberté en vitesse pour l'entrée et chacune des sorties du domaine de calcul, on peut contrôler le flux d'énergie cinétique à l'entrée.

Lemme 1 *Pour tout $(\mathbf{u}, \Lambda) \in W$ tel que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, il existe une constante $C_1 > 0$ tel que*

$$|\lambda_i| \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall i = 0 \dots, N$$

Lemme 2 *Pour des données petites (condition initiale et conditions aux bords), il existe un temps $t^* \in [0, T]$ tel que*

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \leq C, \quad \forall t \leq t^*$$

où la constante C dépend de la condition initiale et des données aux bords.

Théorème 1 *(Grandmont, Maury, A.S.)*

On a existence d'une solution locale pour des données petites.

Paramètre physiques :

Masse des poumons $m \simeq 0.4\text{kg}$

Surface du diaphragme $S \simeq 10^{-2}\text{m}^2$

Viscosité dynamique $\mu \simeq 2 \cdot 10^{-5}\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$

Densité $\rho \simeq 1 \text{kgm}^{-3}$

Volume d'air mis en jeu lors d'un cycle respiratoire $V \simeq 0.5 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$

Durée d'une inspiration $\simeq 2\text{s}$, durée d'une expiration $\simeq 3\text{s}$

Le déplacement du diaphragme est estimé à quelques centimètres :

$$0.05\text{m} \leq x_{max} \leq 0.1\text{m}$$

$R_i = 1.2 \cdot 10^5 \text{Pa}/\text{m}^3\text{s}^{-1}$, en se basant sur les données réelles.

$$k = 2 \text{Nm}^{-1}$$

Estimation de la constante de raideur k :

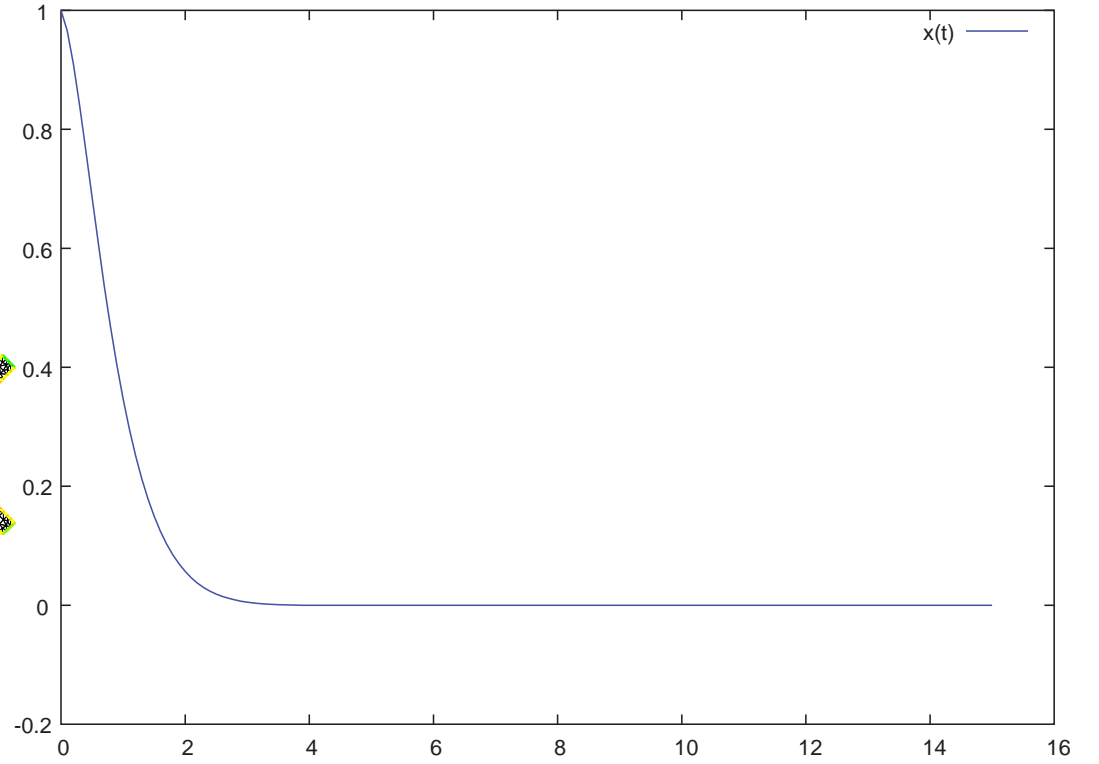
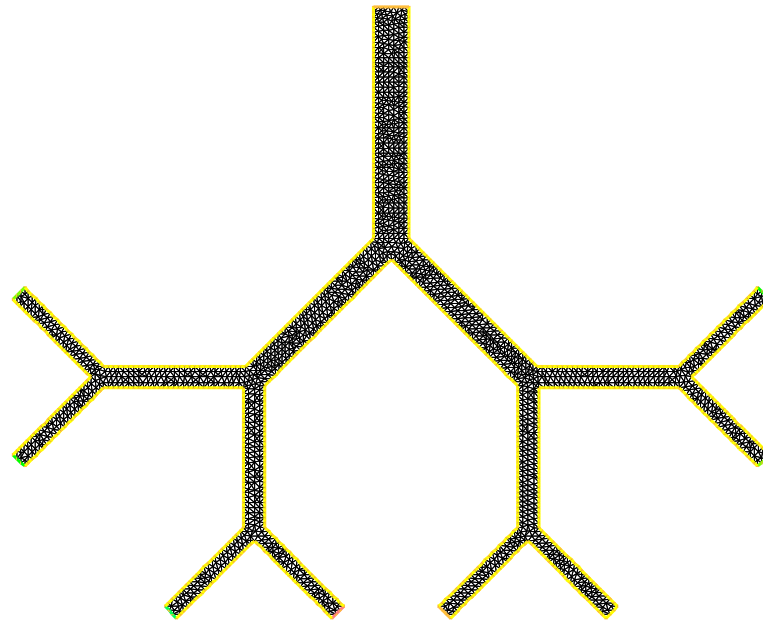
La variation de l'énergie entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de la force entre ces deux instants

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_r \mathbf{u} = \int_{t_1}^{t_2} pS\mathbf{u} = \int_{t_1}^{t_2} pQ_0 = \int_{t_1}^{t_2} RQ_0^2 = \frac{RV^2}{T}$$

Par ailleurs $E(t_2) - E(t_1) = \frac{1}{2}kx_{max}^2$, où t_1 et t_2 sont le début et la fin d'une expiration, d'où

$$k = \frac{2RV^2}{Tx_{max}^2}$$

où R est la résistance équivalente à tout l'arbre. $R = 1.8 \cdot 10^4$ alors $k \approx 2 \text{ Nm}^{-1}$.



FreeFem++, <http://www.freefem.org/ff++/>

