

# Analyse d'un modèle simple de transition de phase

**Edwige Godlewski, Nicolas Seguin**

Laboratoire Jacques-Louis Lions,  
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

# Équations de la dynamique d'un fluide isotherme

Le  $p$ -système (coordonnées lagrangiennes):

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x p = 0 \end{cases} \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

où

$\tau$  volume spécifique  
 $u$  vitesse  
 $p$  pression

Loi de pression:

$$p = \mathcal{P}(\tau)$$

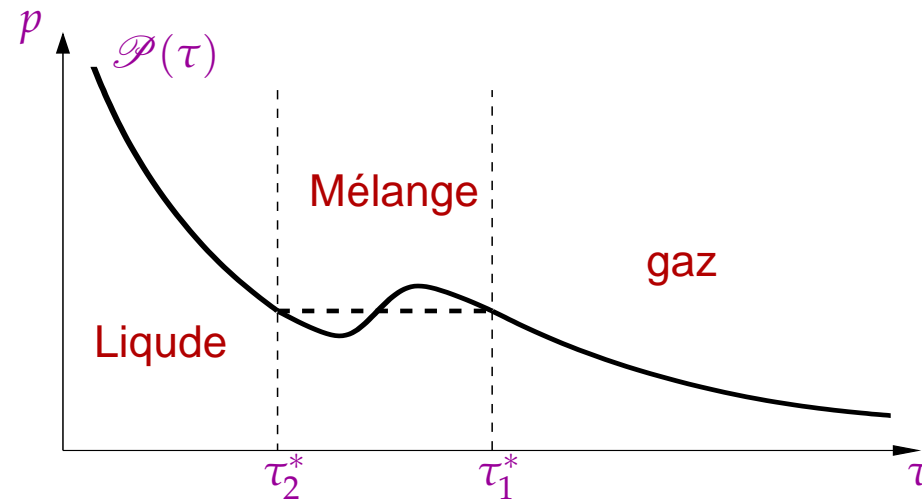
Les résultats sont aussi valides en coordonnées eulériennes.

$$\mathbf{u} = (\tau, u)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = (-u, \mathcal{P}(\tau))^T \\ \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$$

# La loi de pression

Le **comportement thermodynamique du fluide** est donné par la loi  $p = \mathcal{P}(\tau)$ .

- ▷ fluide parfait isentropique:  $\mathcal{P}(\tau) = \tau^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 1$ ,
- ▷ fluide parfait isotherme:  $\mathcal{P}(\tau) = a/\tau$ ,  $a > 0$ ,
- ▷ fluide isotherme de Van der Waals (eau liquide/vapeur):

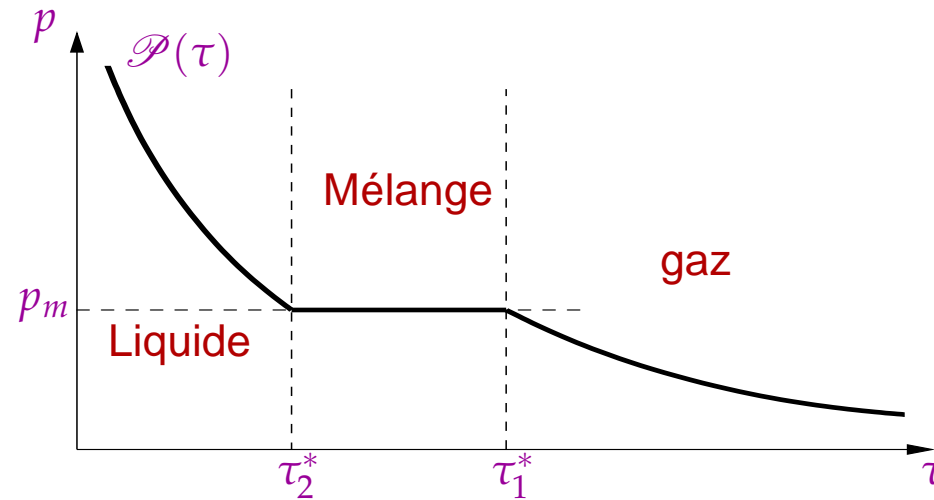


Vitesse du son:

$$c(\tau) = \sqrt{-\mathcal{P}'(\tau)}.$$

# Loi de fermeture dans la zone instable de mélange

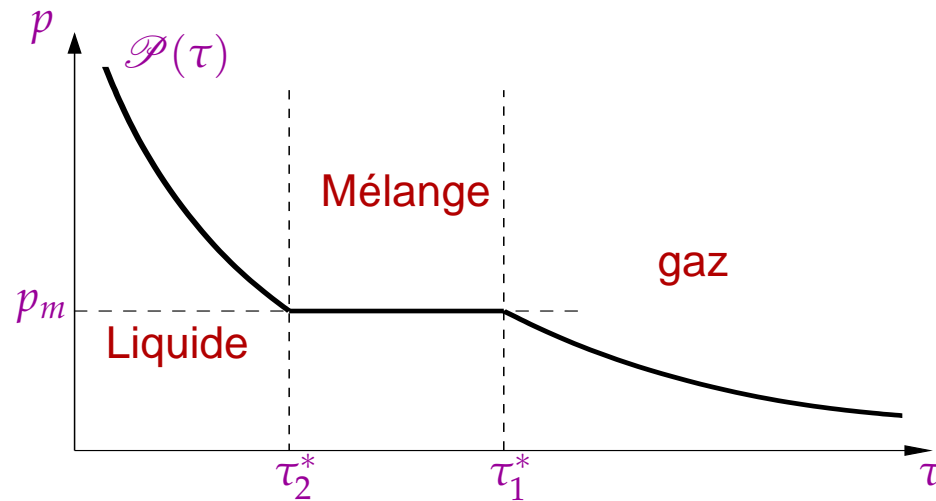
- ▷ Loi de Maxwell (équilibre thermodynamique)



- ▷ Régularisation visco-capillaire (chocs nonclassiques, fonctions cinétiques).  
[Abeyaratne, Knowles], [Truskinovsky], [LeFloch], [Slemrod]...
- ▷ La zone de mélange n'est pas prise en compte:  $\tau \in (0, \tau_2^*) \cap (\tau_1^*, \infty)$ .  
[Colombo, Priuli]...
- ▷ Processus de relaxation entre les deux phases (liquide et gaz) vers l'équilibre thermodynamique.  
[Barberon, Helluy], [Helluy, Seguin], [Caro, Kokh], [Fan], [Amadori]...
- ▷ ...

# Hypothèse sur la loi de pression et conséquences

On considère ici un **fluide de Van der Waals** avec la loi de Maxwell, pour tout  $\tau > 0$ .



$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0$$

- ▷ Dans  $\Omega_p = ((0, \tau_2^*) \cup (\tau_1^*, \infty)) \times \mathbb{R}$ ,  
le  $p$ -système est **strictement hyperbolique** ( $\lambda_{\pm}(\mathbf{u}) = \pm \sqrt{-\mathcal{P}'(\tau)}$ ).
- ▷ Dans  $\Omega_m = (\tau_2^*, \tau_1^*) \times \mathbb{R}$ ,  
le  $p$ -système est **non strictement hyperbolique** ( $\lambda_-(\mathbf{u}) = \lambda_+(\mathbf{u})$ ).  
Le  $p$ -système devient localement le **système des gaz sans pression**.

# Hyperbolicité non stricte et résonance

Dans  $\Omega_m$ , les valeurs propres sont les mêmes

$$\lambda_-(\mathbf{u}) = \lambda_+(\mathbf{u}),$$

et la matrice  $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$  n'est pas diagonalisable.

- ▷ Modèles conservatifs:
  - ▷ cas scalaire [Klingenberg, Risebro], [Towers], [Bachmann, Vovelle]...
  - ▷ cas système [Isaacson, Temple]...
- ▷ Modèles non conservatifs:
  - ▷ cas scalaire [Isaacson, Temple], [Amadori, Gosse, Guerra]...
  - ▷ cas système [Goatin, LeFloch], [Chinnayya, LeRoux, Seguin]...
- ▷ Modèle des gaz sans pression [Brenier, Grenier], [Bouchut, James]...

En général, la zone de résonance est une **hypersurface** de l'espace des phases  $\Omega$ .

Ici, la zone de résonance est un **sous-domaine** de  $\Omega$  (voir aussi [Bachmann]).

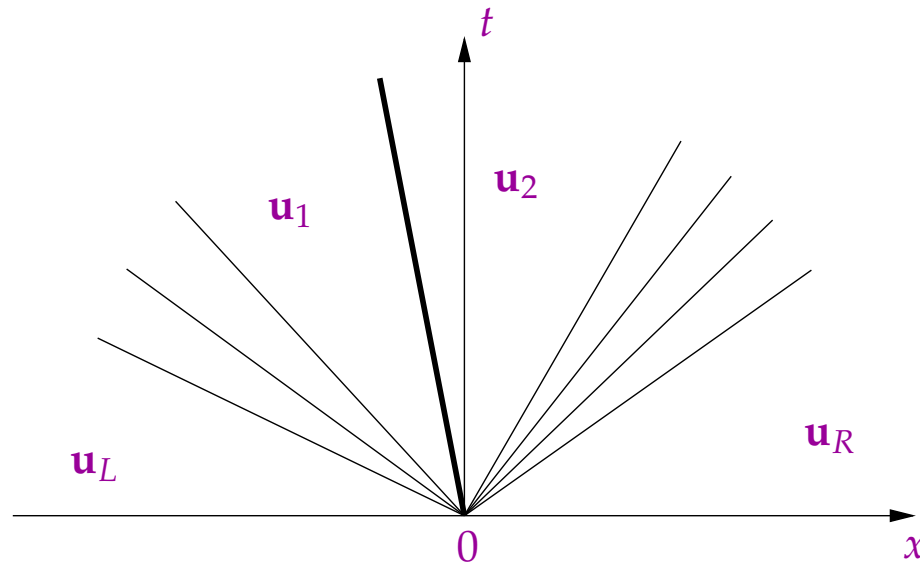
# Le problème de Riemann

On étudie ici le problème de Riemann:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R \in \Omega_m \cup \Omega_p$ .

On considère les **solutions auto-similaires**: “ $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x/t)$ ”.



# Discontinuités admissibles

Relations de saut de Rankine-Hugoniot,  $\mathbf{u}_r \in \mathcal{S}(\mathbf{u}_l)$ :

$$-\sigma(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l) + (\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_l)) = 0,$$

où  $\sigma(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$  est la vitesse de la discontinuité.

Condition d'entropie (E) de Liu:

$$\sigma(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) \leq \sigma(\mathbf{u}_l, \mathbf{u})$$

pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{u}_l)$  avec  $\tau \in (\min(\tau_l, \tau_r), \max(\tau_l, \tau_r))$ .

La condition d'entropie (E) est (dans les cas classiques) équivalente à la sélection obtenue comme limite

- ▷ de la régularisation visqueuse du système [Liu],
- ▷ d'un processus de relaxation [Yong,Zumbrun],

(mais *a priori* incompatible avec une régularisation visco-capillaire).



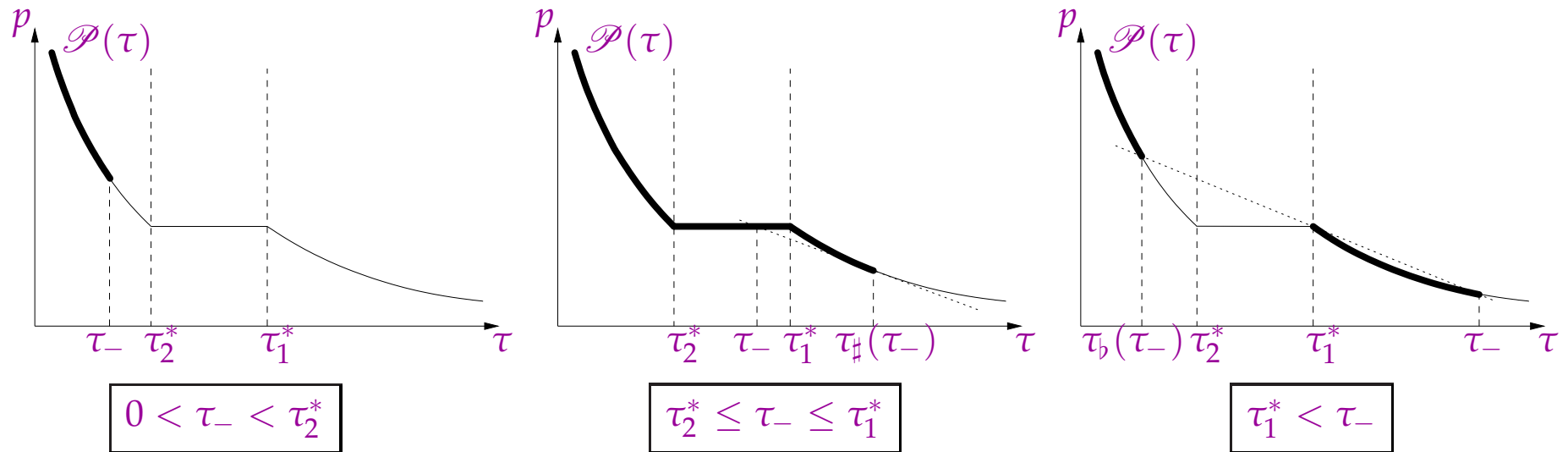
# Interprétation géométrique de la condition d'entropie (E)

[Wendroff] : Une discontinuité entre deux états  $\mathbf{u}_-$  et  $\mathbf{u}_+$  vérifie la condition (E) ssi

$$\mathbf{u}_+ \in \mathcal{S}(\mathbf{u}_-) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) \left( \frac{\mathcal{P}(\tau_+) - \mathcal{P}(\tau_-)}{\tau_+ - \tau_-} - \frac{\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{P}(\tau_-)}{\tau - \tau_-} \right) \geq 0,$$

pour tout  $\tau \in (\min(\tau_-, \tau_+), \max(\tau_-, \tau_+))$ .

$\Rightarrow$  cordes et intersection avec la loi de pression



Parties admissibles pour une onde de vitesse négative ou nulle

# Résultats principaux

## **Théorème 1** (existence and unicité)

Pour tous  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R \in \Omega$ , la solution auto-similaire du problème de Riemann existe et est unique, en autorisant l'apparition du vide  $\{\tau = +\infty\}$  si nécessaire.

## **Théorème 2** (continuité $L^1_{loc}$ )

Soit  $\mathcal{W}(x/t; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  la solution auto-similaire du problème de Riemann.

Pour tout  $L > 0$  et toute paire de données initiales  $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R), (\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \in \Omega^2$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_{-L}^L |\mathcal{W}(\xi; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) - \mathcal{W}(\xi; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)| d\xi \leq C(|\mathbf{u}_L - \mathbf{v}_L| + |\mathbf{u}_R - \mathbf{v}_R|)$$

où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ .

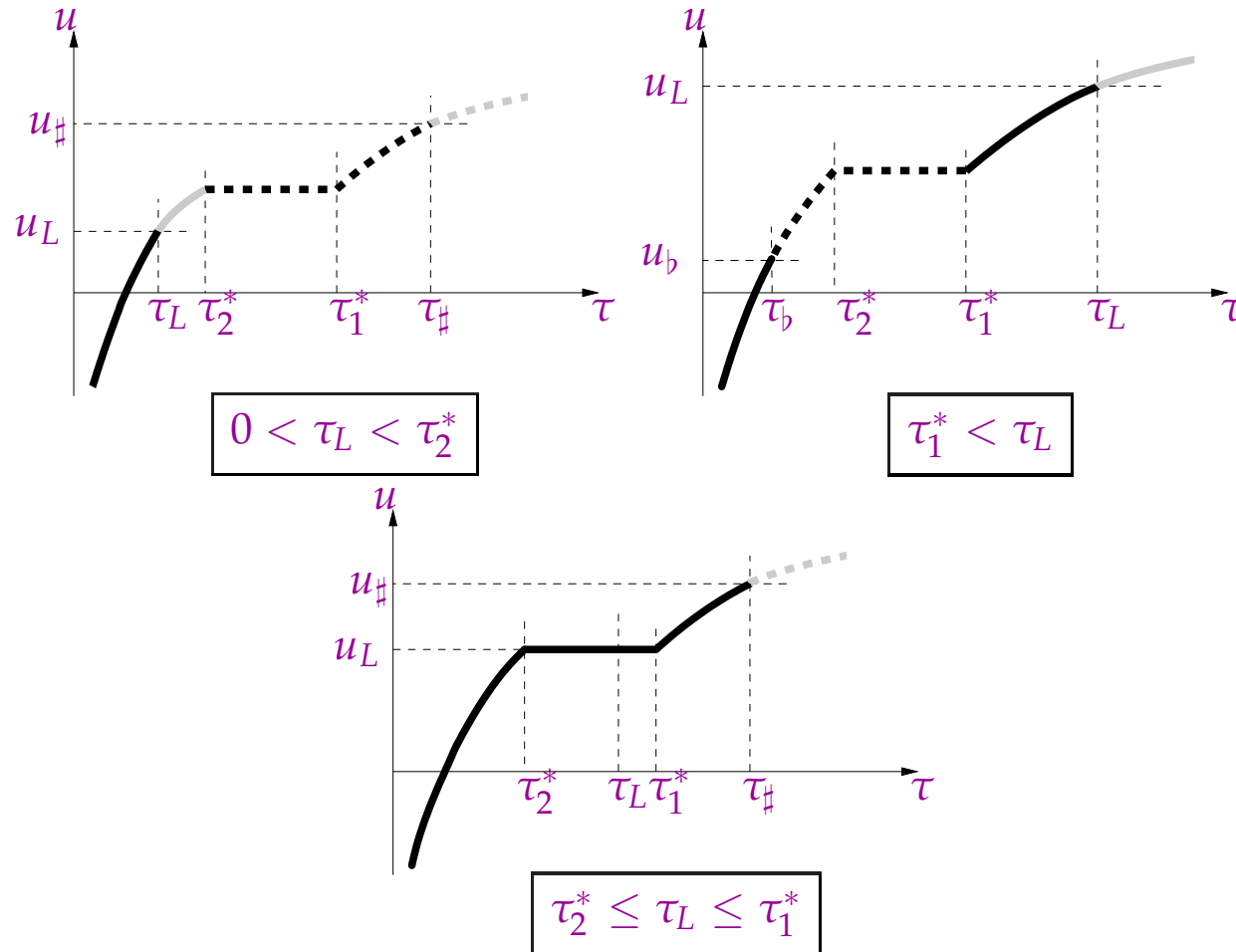
## **Remarque**

Le système étant résonnant, il n'y a pas continuité  $L^\infty_{loc}$ .

# Ondes multiples de vitesse négative ou nulle issues de $\mathbf{u}_L$

- ▷ **Trois cas** à distinguer pour le choix de l'état  $\mathbf{u}_L \in \Omega$  :
  - ▷ Phase 2 :  $0 < \tau_L < \tau_2^*$ .
  - ▷ Mélange :  $\tau_2^* \leq \tau_L \leq \tau_1^*$ .
  - ▷ Phase 1 :  $\tau_1^* < \tau_L$ .
- ▷ Construction des **discontinuités admissibles** partant de  $\mathbf{u}_L$ .
  - ▷ Critère de Liu et caractérisation à la Wendroff.
- ▷ Construction des **ondes de détente** partant de  $\mathbf{u}_L$ .
  - ▷ Invariants de Riemann classiques (mais seulement dans  $\Omega_p$ ).
- ▷ Construction des **ondes multiples** partant de  $\mathbf{u}_L$ .
  - ▷ Succession ordonnée de discontinuités admissibles, d'ondes de détente et d'états constants.
- ▷ **Interprétation géométrique** pour la construction des ondes multiples.
  - ▷ Enveloppe convexe sur la loi de pression (*comme* dans le cas scalaire).

# Ondes multiples de vitesse négative ou nulle



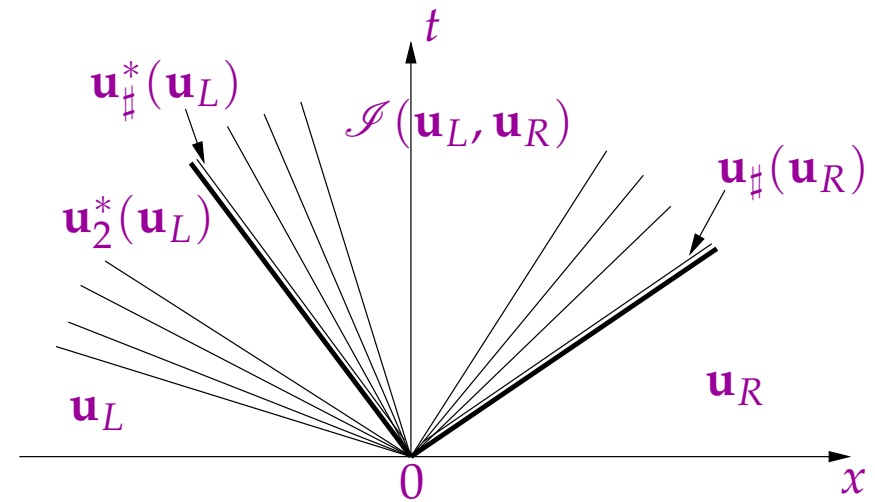
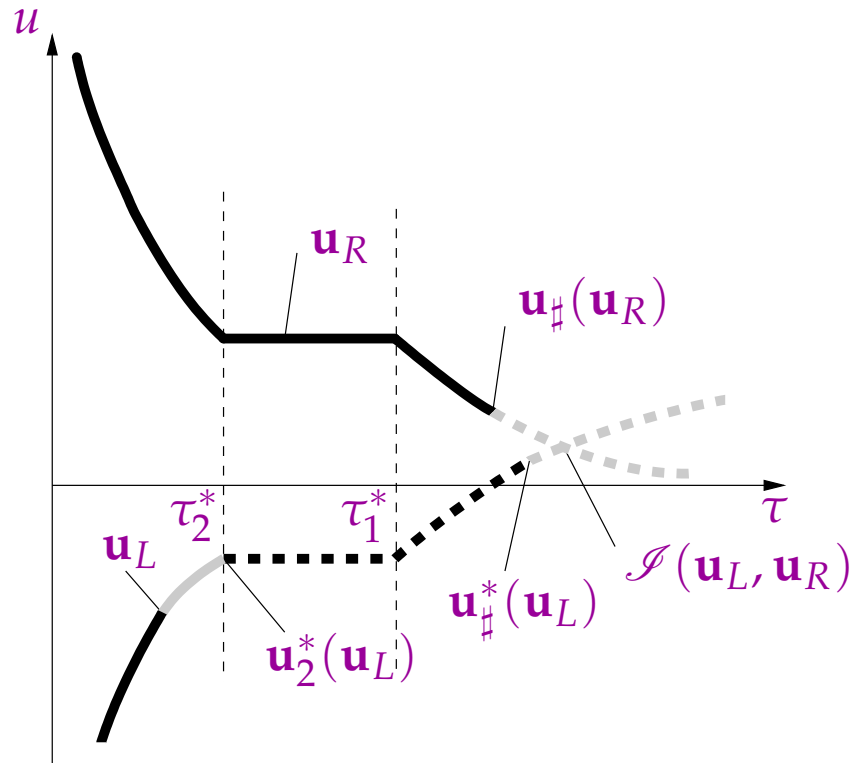
(Les ondes de vitesse positive ou nulle sont obtenues par invariance galiléenne.)

# Une solution auto-similaire du problème de Riemann

On intersecte les deux courbes suivantes :

- ▷ courbe des états pouvant être connectés à  $\mathbf{u}_L$  par des ondes de vitesse  $\leq 0$ ,
- ▷ courbe des états pouvant être connectés à  $\mathbf{u}_R$  par des ondes de vitesse  $\geq 0$ .

Point (état) d'intersection :  $\mathcal{I}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ .



## Démonstration des résultats

- ▷ Résultat d'existence :
  - ▷ soit il existe une intersection entre les deux courbes,
  - ▷ soit on utilise le vide  $\{\tau = +\infty\}$ .
  
- ▷ Résultat d'unicité :
  - ▷ soit l'intersection est unique (cas classique),
  - ▷ soit les différentes intersections correspondent à la même configuration d'onde.
  
- ▷ Résultat de continuité  $L^1_{loc}$  :
  - ▷ étude des changements de configuration d'ondes suivant les données initiales.

# Conclusion et perspectives

- ▷ Le problème de Riemann est bien posé :
  - ▷ existence,
  - ▷ unicité,
  - ▷ dépendance continue.
  
- ▷ Classe de modèles utilisables directement pour les simulations numériques.
  
- ▷ Étude du problème de Cauchy...
  
- ▷ Étude de l'obtention du modèle par relaxation :
  - ▷ profils de chocs de relaxation,
  - ▷ solutions régulières.
  
- ▷ Modélisation un peu plus complexe (chocs non classiques)...