

Instabilité nonlinéaire du modèle MHD sans masse

Raphaël Poncet

rponcet@mip.ups-tlse.fr

MIP (UNIVERSITÉ TOULOUSE III) & CEA-CESTA

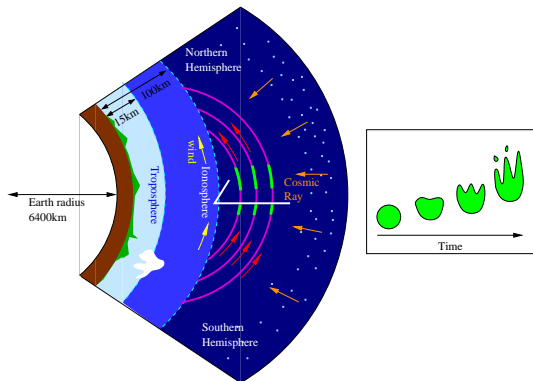


CANUM 2006 - 30 Mai 2006

- 1** Le modèle MHD sans masse
 - Contexte physique
 - Modélisation
- 2** Instabilité linéaire
 - Structure variationnelle
 - Relation de dispersion
- 3** Instabilité nonlinéaire
 - Développement asymptotique
 - Estimation précise du taux de croissance linéaire

L'ionosphère

- L'ionosphère : partie de la haute atmosphère partiellement ionisée par le rayonnement solaire \Rightarrow existence d'un plasma dilué.
- Le plasma ionosphérique est sujet à de nombreux types d'instabilités, au nombre desquelles les **striations**.



- Certaines similitudes avec l'instabilité de RAYLEIGH-TAYLOR en hydrodynamique.
- Origine physique : **interaction** du **plasma** avec les particules **neutres**.
- Caractéristiques géométriques : étirées suivant les lignes du champ magnétique terrestre, déformées dans un plan orthogonal.
- Modélisation : force de relaxation fluide $-n(u - V)$, où n et u sont densité et vitesse du plasma et V le champ de vitesse des neutres (paramètre).
- Critère d'instabilité : Gradient de densité à l'équilibre ∇n_e et vent de signe contraire : $V \cdot \nabla n_e < 0$.

- Analyse d'**instabilité linéaire** pour des états d'équilibres inhomogènes génériques.
- Justification de l'heuristique **instabilité linéaire** \Rightarrow **instabilité nonlinéaire** - en temps petit.

Equations de la MHD idéale

Point de départ : équations de la MHD scalaire incompressible.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \\ \tau [\partial_t nu + \nabla \cdot (nu \otimes u)] + \nabla p = -n(u - V) - \frac{\nabla B^2}{2\beta}, \\ \partial_t B + \nabla \cdot (Bu) = 0, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{array} \right.$$

- Equations sans dimensions.
- Interaction plasma-neutres : $-n(u - V)$.
- Force de LORENZ (pression magnétique) : $-\nabla B^2/2\beta$.
- Hypothèses : B a une direction constante ; on considère que le mouvement est transverse au champ magnétique, et 2D.

Limite asymptotique - MHD sans masse

- Valeur numérique : $\tau \simeq 10^{-1}$ (BESSE ET AL. 2003).
- Limite - formelle - de relaxation : $\tau \rightarrow 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \\ nu = nV - \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\beta} \right), \\ \partial_t B + \nabla \cdot (Bu) = 0, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{array} \right.$$

- l'équation sur la vitesse devient stationnaire et locale.

Limite asymptotique - Modèle striations

- Pour un plasma dilué, $\beta \simeq 10^{-2}$.
- Limite singulière $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow$ modèle striations.
- Version 2D :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \\ -\nabla \cdot (n\nabla\phi) = \nabla \cdot (nV^\perp), \\ u = \nabla^\perp\phi, \end{cases}$$

où $^\perp$: rotation de $\frac{\pi}{2}$.

- Simulations numériques : BESSE ET AL. 2004, 2005.
- Etude théorique de stabilité : BESSE, DEGOND, HWANG, R.P. 2005 (accepté).

Sur l'instabilité de RAYLEIGH-TAYLOR :

- analyse linéaire : LAFITTE 2000 ; HELFFER, LAFITTE 2003 ; CHERFILS-CLÉOUIN, LAFITTE, RAVIART 2004.
- analyse nonlinéaire : HWANG, GUO 2003 ; GRENIER 2000 ; DESJARDINS, GRENIER 2003.

Autres instabilités (méthode variationnelle) :

- instabilité d'EULER-POISSON gravitationnelle : JANG 2005.
- instabilité pour un système de lois de conservation avec structure variationnelle : R.P. (soumis).
Application à l'instabilité de RAYLEIGH-TAYLOR pour la MHD.

- Linéarisé : système d'EDP linéaire inhomogène
⇒ analyse de Fourier non applicable.
- Pas de résultat général.
- Méthode : dérivation d'une équation auxiliaire sur la vitesse possédant une structure variationnelle.
- Lien avec le principe d'énergie pour la MHD (KRUSKAL ET AL. 1958).

- Notés avec l'indice e : (n_e, B_e, p_e) .
- Etat stationnaire : $u = 0$.
- Invariance par translation \Rightarrow dépendance en une variable d'espace x ; vent V dans la direction x .
- Equation à l'équilibre :

$$n_e V + \partial_x p_e = \frac{B_e \partial_x B_e}{\beta}.$$

- En toute généralité : problème complexe (solutions stationnaires de la MHD).

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n_e u) = 0, \\ n_e u = nV - \frac{B_e \nabla B}{\beta} - \nabla p, \\ \partial_t B + \nabla \cdot (B_e u) = 0. \end{cases}$$

Equation auxiliaire

- Formulation tourbillon 2D : $u = \nabla^\perp \phi$ ($^\perp$: rotation de $\frac{\pi}{2}$).
- Equation auxiliaire sur la vitesse :

$$\partial_t A_e(\phi) = F_e(\phi),$$

où

$$A_e(\phi) = -\nabla \cdot (n_e \nabla \phi), \quad \text{et} \quad F_e(\phi) = (V \partial_x n_e) \partial_{yy} \phi.$$

sont des opérateurs symétriques.

- Formules générales (3D) plus complexes, mais structure identique.

$$\lambda_k = \sup_{\phi \in V_k} \frac{\int_{\Omega} F_e(\phi) \cdot \phi}{\int_{\Omega} A_e(\phi) \cdot \phi}$$

où $k \in \mathbb{N}$, et $\{ \phi(x, y) \in H^1(\Omega), \phi(x, y) \equiv \phi(x) e^{iky} \}$.

- Ne permet d'obtenir - a priori - que certaines valeurs propres.
- Permet de retrouver le critère - local - d'instabilité : $V \cdot \nabla n_e < 0$.

- Question : Instabilité linéaire \Rightarrow Instabilité nonlinéaire ?
- Élémentaire pour une EDO.

- Instabilité au sens de Lyapunov pour les normes L^2 et L^∞ :

THÉORÈME

Soit $s \geq 3$, et (n_e, B_e, p_e) un état d'équilibre du modèle MHD sans masse, tel que $V \cdot \nabla n_e < 0$ en un point.

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$, t.q. pour tout $\delta > 0$, il existe une solution $(n^\delta, u^\delta, B^\delta)$ du modèle, telle que

$\|n^\delta(0, \cdot) - n_e\|_{H^s} + \|B^\delta(0, \cdot) - B_e\|_{H^s} \leq \delta$, mais, pour un choix convenable de T^δ ,

$$\|n^\delta(T^\delta, \cdot) - n_e\|_{L^2 \cap L^\infty} + \|u^\delta(T^\delta, \cdot)\|_{L^2 \cap L^\infty} + \|B^\delta(T^\delta, \cdot) - B_e\|_{L^2 \cap L^\infty} \geq \varepsilon_0.$$

- En temps petit, le système “ressemble” au système linéarisé.
- Approche perturbative :

$$X_{NL} = X_L + R_{NL}$$

- Objectif : $\|R_{NL}(t)\| \ll \|X_L(t)\|$ en temps petit.
- Problème : choix de la norme.
- Méthodes directes d'estimation de R_{NL} (estimations d'énergie $H^s \dots$) insuffisantes.

Développement asymptotique

- Notation : $X \equiv$ solution du système MHD sans masse.
- Idée : $X^\delta(t=0) = X_e + \delta X_\lambda$, où X_λ : vecteur propre du linéarisé associé à la valeur propre $\lambda > 0$ (à choisir ultérieurement).
- Ecrire la solution sous la forme :

$$X^\delta(t, \cdot) = X_e + \delta X_\lambda(t, \cdot) + \sum_{j=2}^N \delta^j X_j(t, \cdot) + R_{NL}^N(t, \cdot).$$

- $X_\lambda \sim e^{\lambda t}$.
- X_j obtenu comme solution du linéarisé avec terme source dépendant de X_2, \dots, X_{j-1} .
- Contrôle des X_j et de R_{NL}^N ?

PROPOSITION

$\|X_j(t, \cdot)\|_{H^s} \leq C e^{j\lambda t}$, et, pour N assez grand,
 $\|R_{NL}^N(t, \cdot)\|_{H^s} \leq C \delta^{N+1} e^{(N+1)\lambda t}$.

- Suffit à conclure.
- L'estimation sur X_j repose sur une estimation précise du taux de croissance linéaire.

Estimation précise du taux de croissance linéaire

$$\|X_L(t, \cdot)\|_{H^s} \leq C_{s,\varepsilon} \|X_L(t=0)\|_{H^s} e^{(\Lambda+\varepsilon)t},$$

où

$$\Lambda = \sup_{\phi \in H^1} \frac{\int_{\Omega} F_e(\phi) \cdot \phi}{\int_{\Omega} A_e(\phi) \cdot \phi}.$$

- Preuve : estimation d'énergie sur le linéarisé utilisant la structure variationnelle.
- Il faut choisir $\lambda > \frac{\Lambda}{2}$.

- Analyse nonlinéaire de stabilité complète pour le modèle MHD sans masse incompressible et scalaire.
- Résultats en accord avec les critères d'instabilité physique et les simulations numériques.
- Méthode robuste - généralisations et applications envisageables.

Compléter l'analyse de stabilité du modèle MHD sans masse :

Application de la méthode à d'autres modèles de physique des plasmas :

Simulations numériques du modèle MHD sans masse.

Compléter l'analyse de stabilité du modèle MHD sans masse :

- Existence locale pour le système 3D, compressible.

Application de la méthode à d'autres modèles de physique des plasmas :

Simulations numériques du modèle MHD sans masse.

Compléter l'analyse de stabilité du modèle MHD sans masse :

- Existence locale pour le système 3D, compressible.
- Existence de valeurs propres associées à des modes compressibles.

Application de la méthode à d'autres modèles de physique des plasmas :

Simulations numériques du modèle MHD sans masse.

Compléter l'analyse de stabilité du modèle MHD sans masse :

- Existence locale pour le système 3D, compressible.
- Existence de valeurs propres associées à des modes compressibles.

Application de la méthode à d'autres modèles de physique des plasmas :

- Instabilités de la MHD stationnaire.

Simulations numériques du modèle MHD sans masse.

Compléter l'analyse de stabilité du modèle MHD sans masse :

- Existence locale pour le système 3D, compressible.
- Existence de valeurs propres associées à des modes compressibles.

Application de la méthode à d'autres modèles de physique des plasmas :

- Instabilités de la MHD stationnaire.
- Autres.

Simulations numériques du modèle MHD sans masse.