

# Méthode particulière pour les écoulements compressibles

Lisl WEYNANS  
Lisl.Weynans@cea.fr

Georges-Henri Cottet (LMC-IMAG) et Bernard Rebouret (CEA/DAM)

## Equations d'Euler compressibles

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

- Soient  $\xi$  les coordonnées lagrangiennes et  $J$  le Jacobien de  $[\xi \mapsto x]$ .  $J$  vérifie:  $\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \vec{u}$

On obtient le système:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho J}{dt} &= 0 \\ \frac{d\rho J \vec{u}}{dt} &= -J \nabla p \\ \frac{d\rho J E}{dt} &= -J \nabla \cdot (p \vec{u}) \\ \frac{dJ}{dt} &= J \nabla \cdot \vec{u} \\ \frac{dx}{dt} &= \vec{u} \end{aligned}$$

Mélange de formalisme lagrangien (dérivées temporelles) et eulérien (dérivées spatiales)

- Intégration sur  $V(t)$  tel que  $\frac{\partial V}{\partial t} = V \nabla \cdot \vec{u}$  + application du théorème de Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV &= - \int_{V(t)} \nabla p dV \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV &= - \int_{V(t)} \nabla \cdot (p \vec{u}) dV \end{aligned}$$

- On découpe le fluide en petits éléments: les particules, définies par une position  $x_p$ , un volume  $V_p$  et les valeurs  $\vec{u}_p, E_p$  et  $\rho_p$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_p J_p}{dt} &= 0 \\ \frac{d\rho_p J_p \vec{u}_p}{dt} &= -J_p (\nabla p)_p \\ \frac{d\rho_p J_p E_p}{dt} &= -J_p (\nabla \cdot (p \vec{u}))_p \\ \frac{dJ_p}{dt} &= J_p (\nabla \cdot \vec{u})_p \\ \frac{dx_p}{dt} &= \vec{u}_p \end{aligned}$$

## Remaillage-Interpolation

- Les particules sont portées par l'écoulement  $\Rightarrow$  accumulation ou raréfaction locales
- Or une distribution régulière des particules est importante pour la précision des calculs.
- De plus, les particules ne doivent pas se croiser.  $\Rightarrow$  Une solution: REMAILLER = créer conservativement de nouvelles particules équiréparties.

- Formule 1D:

$\tilde{F}_i$  valeur de la nouvelle particule située sur le point de grille  $\tilde{x}_i$

$F_p$  valeur de l'ancienne particule  $p$ , située en  $x_p$

$h$  pas de la grille

$\Lambda(x)$  fonction d'interpolation

$$\tilde{F}_i = \sum_p F_p \Lambda\left(\frac{\tilde{x}_i - x_p}{h}\right)$$

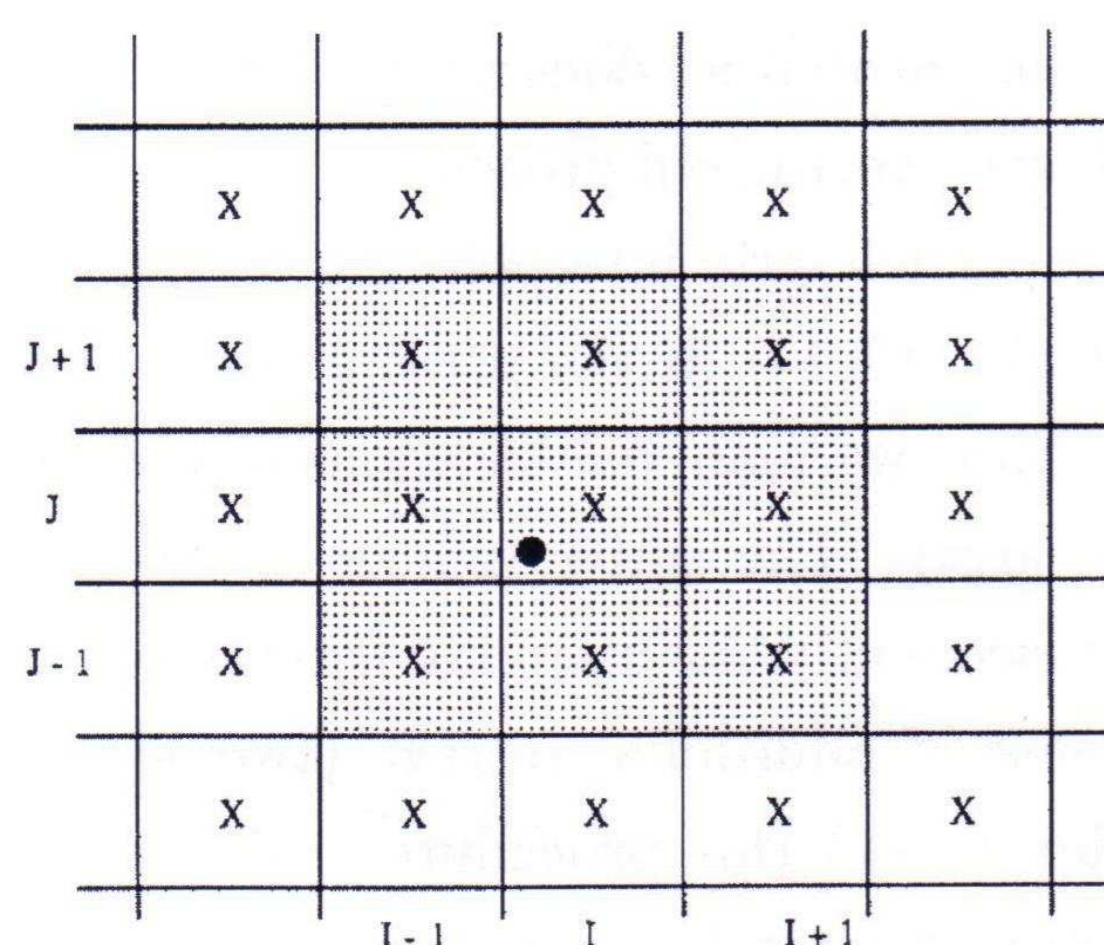
- 

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 0.5 \\ (1 - |x|)(2 - |x|)/2 & \text{si } 0.5 < |x| \leq 1.5 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1.5 \end{cases}$$

$$M'_4(x) = \begin{cases} 1 - 5x^2/2 + 3|x|^3/2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ (2 - |x|)^2(1 - |x|)/2 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

- En 2D ou 3D: produits tensoriels de fonctions d'interpolation 1D.

● Old particle  
X New particles



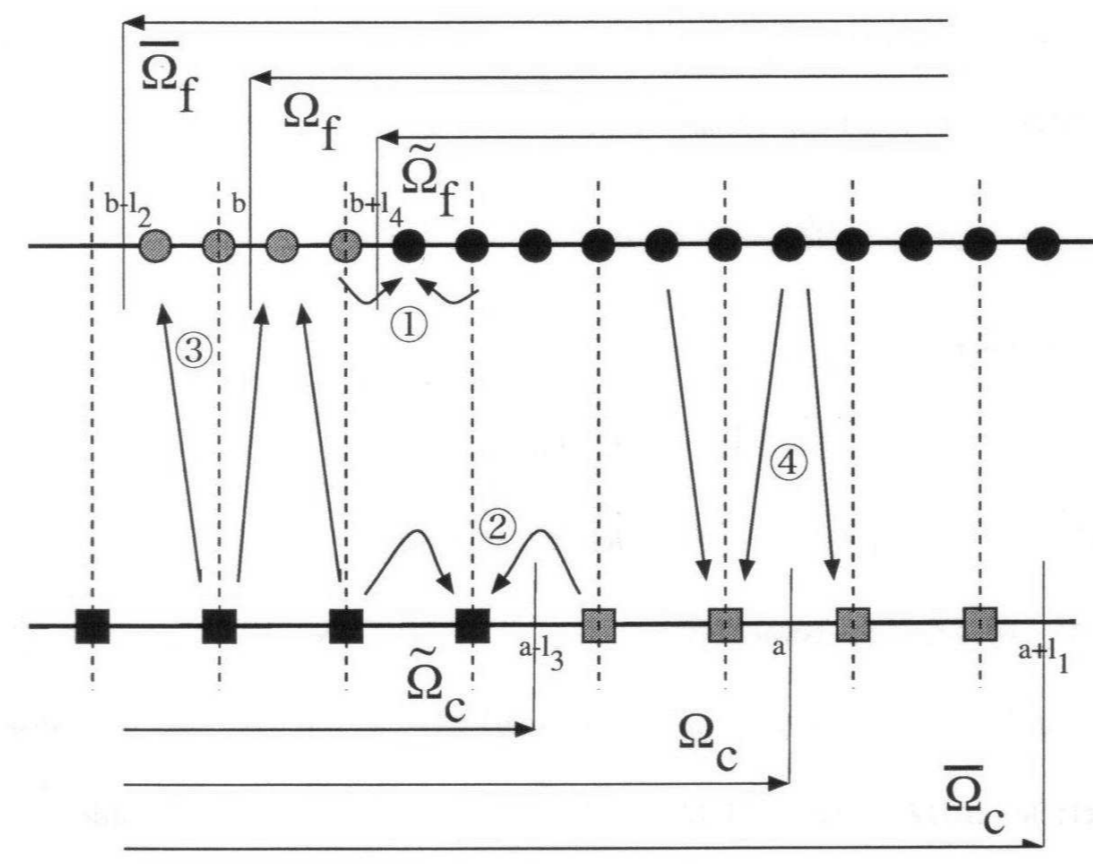
## Multigrilles (inspiration AMR)

- Pour adapter la précision: plusieurs grilles, de finesse croissante, correspondant à des particules de taille différente, couvrent le domaine de calcul.

- La largeur et la position des grilles varient selon critères sur les gradients...

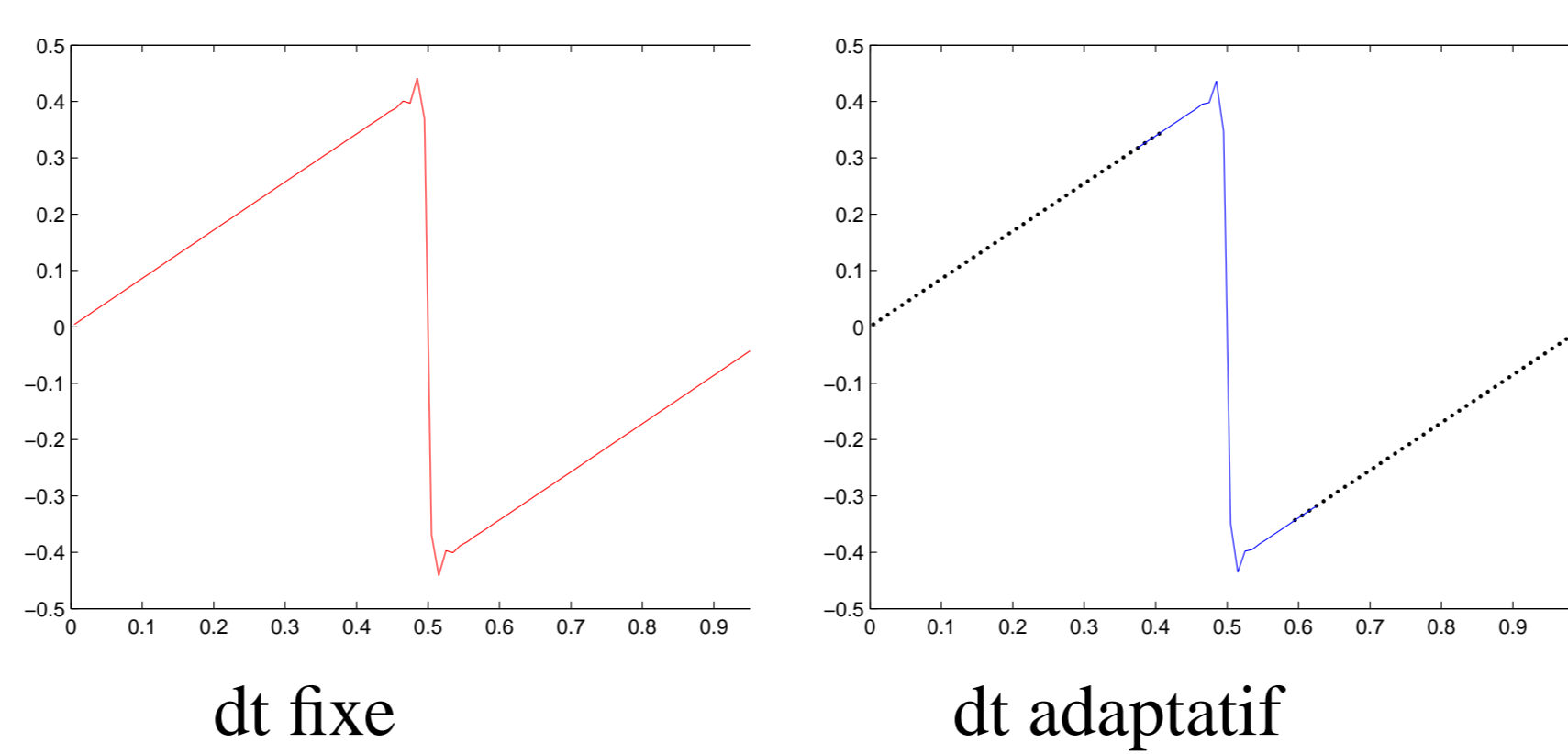
- La superposition partielle des sous-domaines, qui permet d'échanger des informations entre les grilles pendant le remaillage (Bergdorf, Cottet, Koumoutsakos).

- Conservation de la masse au même ordre que l'interpolation.

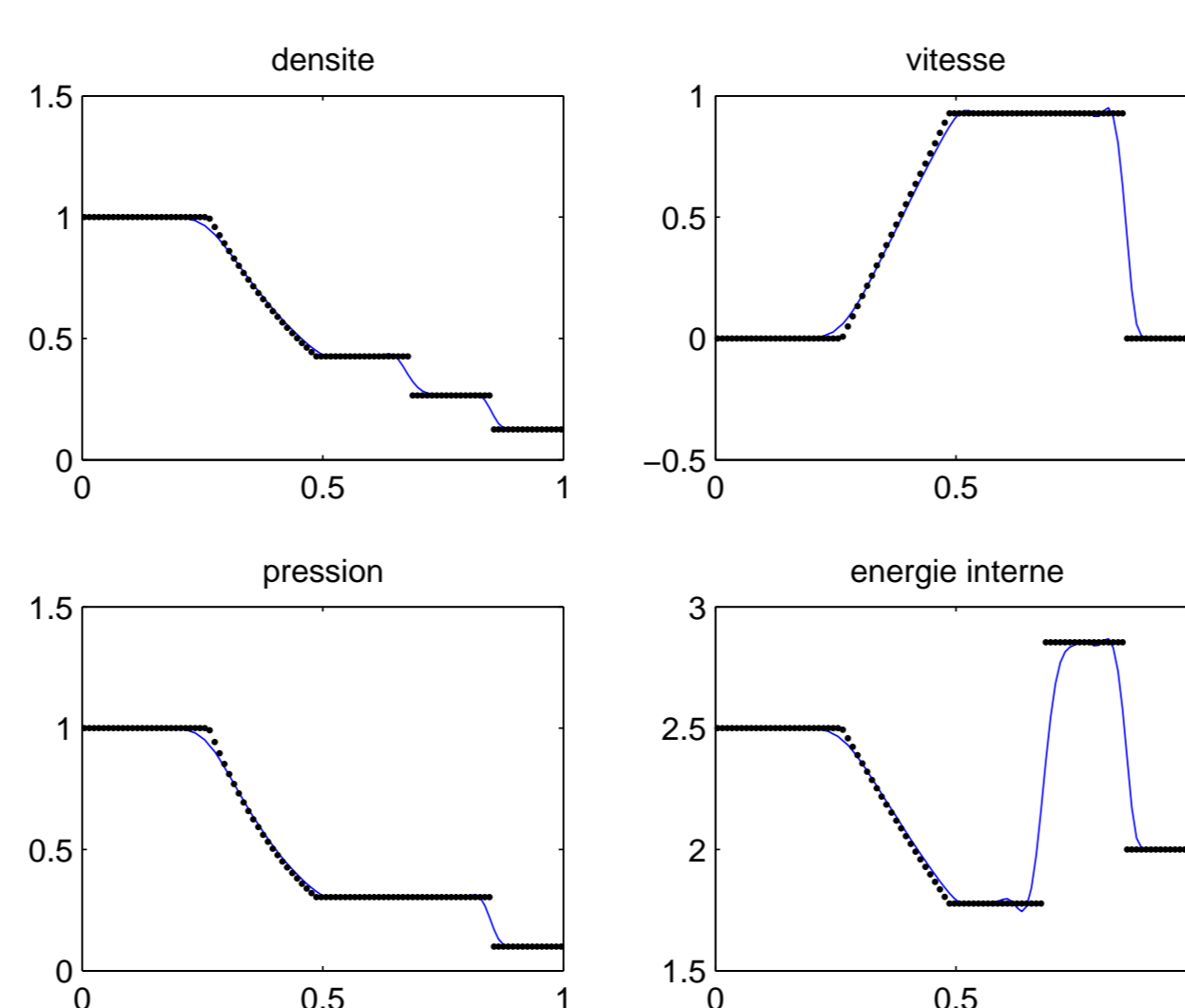


## Résultats numériques

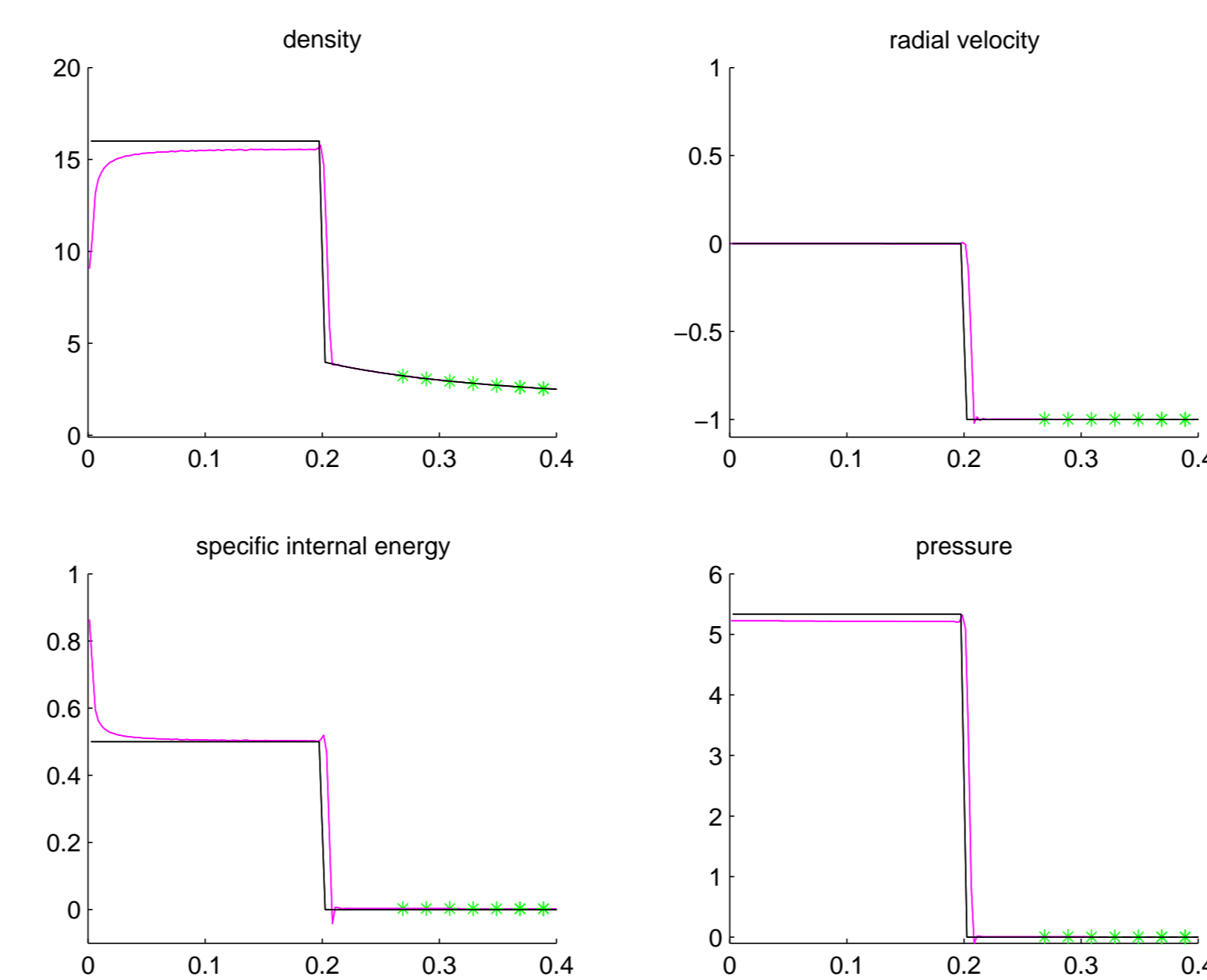
- Multigrilles: pas de temps adaptatif



- Tube à chocs de Sod (100 particules, dt = 0.002)



- Problème de Noh (2D)



$dr_1 = 1/50, dr_2 = 1/400$ , solveur de Riemann (ordre 1)

## Etude sur une équation de transport modèle

$$u_t + (g(u)u)_x = 0$$

Chaque particule  $i$  vérifie:

$$\begin{cases} \frac{dV_i u_i}{dt} = 0 \\ \frac{dx_i}{dt} = g(u_i) \\ \frac{dV_i}{dt} = \left(\frac{\partial g(u)}{\partial x}\right)_i V_i \end{cases}$$

A chaque itération: déplacement des particules puis remaillage avec une fonction d'interpolation  $\Lambda$ .

$$x_i \leftarrow x_i + dtg(u_i^n)$$

$$V_i^{n+1} u_i^{n+1} = \sum_j V_j^n u_j^n \Lambda\left(i + \frac{dt}{dx} g(u_j^n)\right)$$

Au début de chaque pas de temps  $V_i = dx$ .

On obtient un schéma aux différences finies:

$$u_i^{n+1} = \sum_j u_j^n \Lambda\left(i + \frac{dt}{dx} g(u_j^n)\right)$$

$\Lambda$  fonction d'interpolation polynomiale par morceaux de degré  $N$  préservant les  $M$  premiers moments:

$$\sum_k k^i \Lambda(k - x) = x^i \quad \forall 0 \leq i \leq M - 1$$

$$u_j^{n+1} = \sum_k u_{j+k}^n \Lambda\left(\frac{dt}{dx} g(u)_{j+k} + k\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(-dt)^i}{i!} (g^i(u)u)^{(i)} + \sum_{i=1}^N O(dx^{M-i} dt^i)$$

- Cas linéaire:  $g(u) = a$ 
  - Le déplacement des particules est exact  $\rightarrow$  pas besoin de condition CFL.
  - Le schéma avec  $\Lambda_2$  est équivalent à la solution exacte combinée au schéma de Lax-Wendroff.

- Cas non-linéaire:

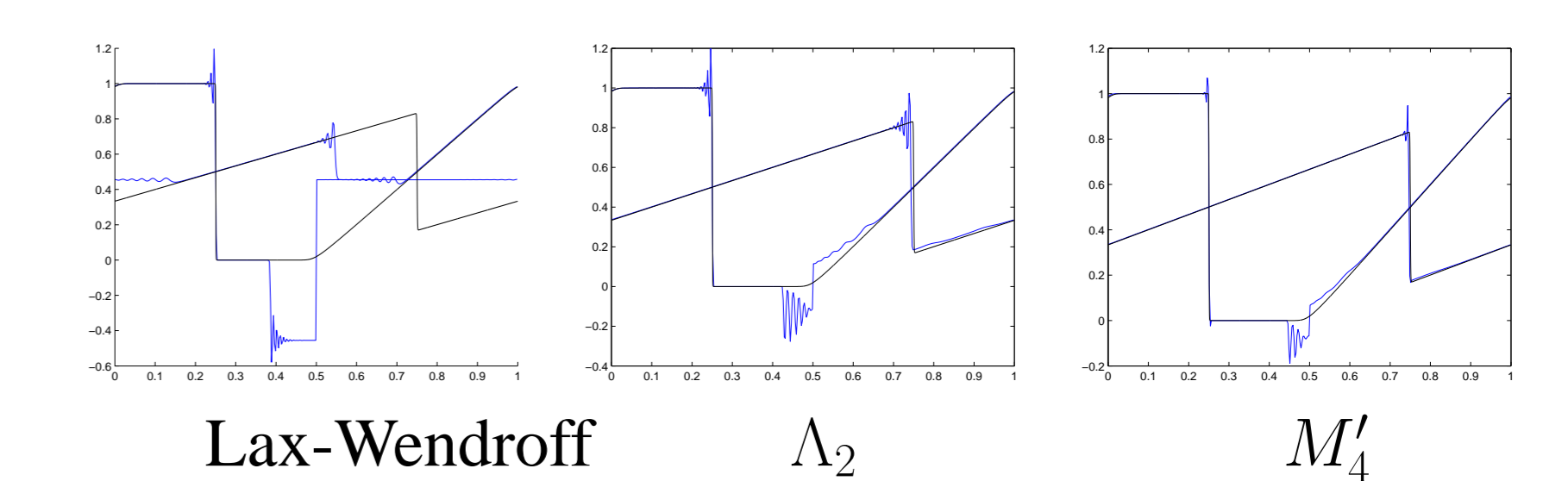
Le schéma avec  $\Lambda_2$  est différent de Lax-Wendroff, d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Il faut corriger la vitesse  $g(u)$  pour améliorer le déplacement des particules et obtenir l'ordre 2 en temps.

Par exemple:  $g(u) = \frac{dt}{2} u g(u, x)$

- Application à l'équation de Burgers:

Conditions initiales  $u = 0$  si  $x < 0.5$ ,  $u = 1$  si  $x \geq 0.5$

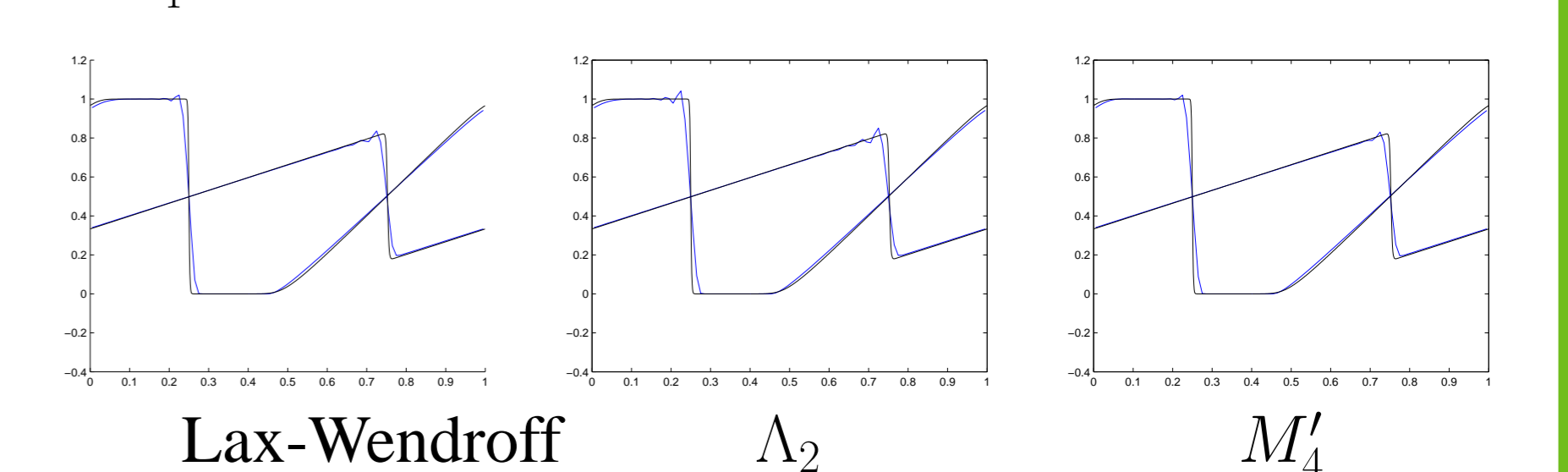
Lax-Wendroff converge vers une solution non-entropique. Ce n'est pas le cas pour les schémas avec  $\Lambda_2$  et  $M'_4$



Majda et Osher: terme non-linéaire de viscosité artificielle pour stabiliser Lax-Wendroff:

$$C(|u_{j+1} - u_j|(u_{j+1} - u_j) - |u_j - u_{j-1}|(u_j - u_{j-1}))$$

Pour valeur de  $C$  appropriée,  $\sum u_j^{n+1} \leq \sum u_j^n$



## Suivi d'interface

- Méthode de type level-set.

$$\phi_t + \vec{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

- $\phi \leq 0$  dans un fluide et  $\geq 0$  dans l'autre
- $\phi$  discrétisée sur les particules, advectée et interpolée comme les autres variables.

Instabilité de Kelvin-Helmholtz, 2500 particules

