

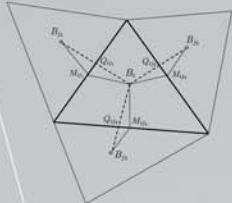
Vivien Clauzon

## Problème considéré

Équation de transport d'un scalaire dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

$$\partial_t U(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} F_k(U(\mathbf{x}, t)) = 0$$

$\Omega$  est discrétisé en un ensemble de tétraèdres  $K_i \in \mathcal{T}_h$ .

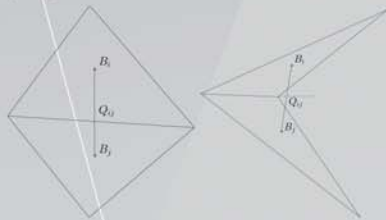


Notations (équivalent 2D).

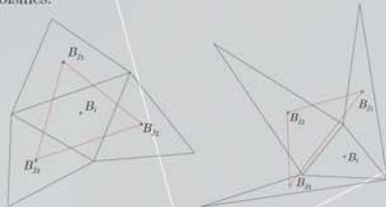
$Q_{ij}$  est l'intersection de  $(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j)$  avec l'interface  $S_{ij}$  et  $\mathbf{M}_{ij}$  est le centre de  $S_{ij}$ .  $\mathbf{n}_{ij}$  est la normale extérieure à  $K_i$ , portée par  $S_{ij}$ .  $\mathcal{Y}(i)$  est l'ensemble des indices des voisins de  $K_i$ .

## Hypothèses sur le maillage

•  $Q_{ij} \in S_{ij}$ , ce qui n'est pas le cas *a priori*.



•  $\mathbf{B}_i$  est dans le tétraèdre formé par les centres des cellules voisines.



Ces hypothèses s'avèrent peu restrictives. Les maillages ne génèrent en général pas de maille aussi déformée.

## Formulation volumes finis

Intégration sur  $K_i \subset \Omega_h$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{K_i} U \, d\mathbf{x} \right) + \int_{\partial K_i} \mathbf{F}(U) \cdot \mathbf{n}_{\partial K_i} \, ds = 0.$$

Formulation volumes finis

$$|K_i| \frac{dU_i(t)}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{Y}(i)} |S_{ij}| \mathbf{F}_{i,j}(t, U_{i,j}(t), U_{j,i}(t)) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (*)$$

où  $\mathbf{F}_{i,j}$  est un flux numérique à définir et  $U_{i,j}$  la valeur de l'inconnue du côté "gauche" de l'interface  $S_{ij}$ . La montée en ordre MUSCL se fait généralement en calculant une reconstruction  $\mathbb{P}_1$  de  $U_{i,j}$ .

## Reconstruction d'ordre 2 multi-pentes

La méthode que nous proposons permet par essence de tenir compte **facilement** de l'information dans toutes les directions. Nous considérons une pente dans chaque direction  $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$ . ( $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij}$  ou  $\mathbf{M}_{ij}$ )

$$\forall j \in \mathcal{Y}(i), \quad U_{i,j} = U_i + p_{ij} \|\mathbf{B}_i, \mathbf{X}_{ij}\|$$

ou sous une forme locale

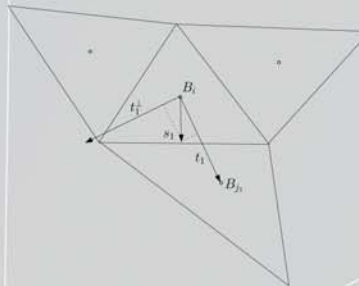
$$\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad U_{i,j_k} = U_i + p_k \|\mathbf{B}_i, \mathbf{X}_{ij_k}\|$$

## Principe d'une reconstruction en $Q_{ij}$

- On définit les directions  $\mathbf{t}_k = \frac{\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{j_k}}{\|\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{j_k}\|}$
- Projection (maillage non singulier)  $\mathbf{t}_k = \sum_{l \neq k} \beta_{kl} \mathbf{t}_l$
- Pente de référence est  $p_k^+ = \frac{U_{j_k} - U_i}{\|\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{j_k}\|}$
- Pente suivant  $-\mathbf{t}_k$   $p_k^- = \sum_{l \neq k} \beta_{kl} p_l^+$
- Limitation  $p_k = \psi(p_k^+, p_k^-)$

## Principe d'une reconstruction en $M_{ij}$

- Nouvelles directions  $\mathbf{s}_k = \frac{\mathbf{B}_i, \mathbf{M}_{j_k}}{\|\mathbf{B}_i, \mathbf{M}_{j_k}\|}$
- Orthogonal à  $\mathbf{t}_k$   $\mathbf{t}_k^\perp = \frac{\mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{t}_k}{\|\mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{t}_k\|}$



- Projection de  $\mathbf{s}_k$   $\mathbf{s}_k = \alpha_k \mathbf{t}_k + \beta_k \mathbf{t}_k^\perp$
- Projection de  $\mathbf{t}_k^\perp$   $\mathbf{t}_k^\perp = \sum_{l \neq k} \pi_{kl} \mathbf{t}_l$
- Pente suivant  $\mathbf{s}_k$   $q_k^+ = \alpha_k p_k^+ + \beta_k \sum_{l \neq k} \pi_{kl} p_l^+$
- Pente suivant  $-\mathbf{s}_k$   $q_k^- = \sum_{l \neq k} \beta_{kl} q_l^+$
- Limitation  $q_k = \psi(q_k^+, q_k^-)$

## Critères de stabilité

Nous avons choisi d'étudier le critère LED-P qui requière à la fois que le schéma soit LED (Local Extremum Diminishing) et Positif (sous une condition de type CFL). Ceci implique en particulier que le schéma respecte le *principe du maximum local* qui est un des critères les plus étudiés dans la littérature.

Le schéma (\*) est LED-P s'il peut s'écrire comme suit

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \sum_{j \in \mathcal{Y}(i)} c_{ij} (U_j - U_i) \quad \text{avec } c_{ij} \geq 0$$

## Travaux en cours

- *Modélisation et simulation d'un jet de plasma*
  - Simulation d'un jet turbulent (avec la collaboration de Thierry Dubois<sup>1</sup>)
  - Modélisation d'un jet en sortie de torche à plasma (avec la collaboration de Gilles Mariaux<sup>2</sup>)
- *Simulation de l'écoulement à l'intérieur d'une torche à plasma*
  - Une nouvelle méthode de type MUSCL (avec la collaboration de Stéphane Clain<sup>3</sup> et Thierry Buffard<sup>1</sup>)
  - Résolution des équations d'Euler par une méthode volumes finis (avec la collaboration de Stéphane Clain)

## Conditions requises pour la stabilité

La reconstruction de l'inconnue au niveau des interfaces doit vérifier l'une des propriétés suivantes pour obtenir la stabilité souhaitée.

• Convexité

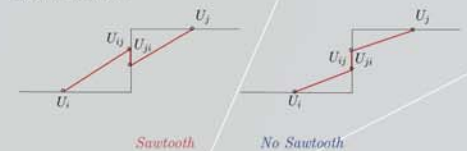
$$U_{i,j} = U_i + \theta_{ij}(U_j - U_i), \quad 0 \leq \theta_{ij} \leq 1. \quad (i)$$

• *No sawtooth* dans chaque direction  $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$

$$U_i \leq U_{i,j} \leq U_{j,i} \leq U_j, \quad \text{si } U_i \leq U_j, \quad (ii)$$

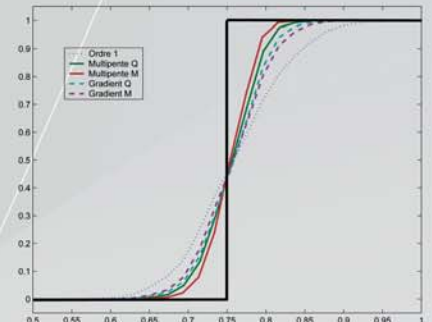
$$U_j \leq U_{j,i} \leq U_{i,j} \leq U_i, \quad \text{si } U_j \leq U_i.$$

On montre que (i) implique LED et que (ii) implique le caractère LED-P.



## Résultats

- Le schéma multi-pentes en  $Q_{ij}$  est LED-P car le caractère *No sawtooth* dans chaque direction est acquis grâce à l'utilisation d'un limiteur *minmod*.
- Le schéma multi-pentes en  $M_{ij}$  est LED.



Ordre 1	$C (\times 10^{-2})$	$\alpha$	Gradient	$C (\times 10^{-2})$	$\alpha$
Régulier	1.7	0.7	Régulier	1.3	0.8
Discont.	7.5	0.4	Discont.	7.4	0.4

multi $Q_{ij}$	$C (\times 10^{-2})$	$\alpha$	multi $M_{ij}$	$C (\times 10^{-2})$	$\alpha$
Régulier	1.8	1.0	Régulier	4.2	1.3
Discont.	5.3	0.5	Discont.	5.9	0.6

Convergence en norme  $L^1$  des méthodes, dans un cas régulier et un cas discontinu. ( $\log \varepsilon_{L^1} = \alpha \log \Delta x + \log C$ )

Gradient	Complexité	gain en temps
Régulier	205%	16
Discont.	205%	9

multi $Q_{ij}$	Complexité	gain en temps
Régulier	125%	190
Discont.	125%	60

multi $M_{ij}$	Complexité	gain en temps
Régulier	150%	1130
Discont.	150%	300

Complexité et gain en temps de calcul (à précision égale) des méthodes relativement à la méthode d'ordre 1.

La méthode multi-pentes est d'ordre 2, stable, rapide et facile à implémenter.

<sup>1</sup> Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques, Campus Universitaire des Cézeaux, 63177 Aubière

<sup>2</sup> Université de Limoges, ENSIL, 16 rue d'Atlantique, Parc Ester Technopôle, BP 6094, 87068 Limoges

<sup>3</sup> Université de Toulouse 3, Laboratoire MIP, 31062 Toulouse