

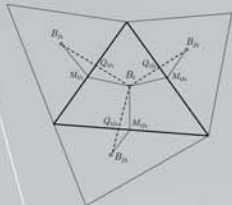
Vivien Clauzon

Problème considéré

Équation de transport d'un scalaire dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\partial_t U(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} F_k(U(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Ω est discrétisé en un ensemble de tétraèdres $K_i \in \mathcal{T}_h$.

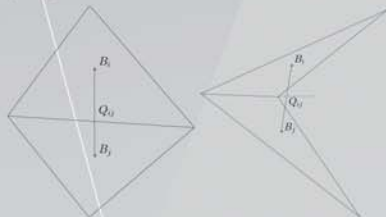


Notations (équivalent 2D).

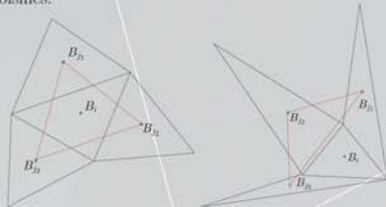
Q_{ij} est l'intersection de $(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j)$ avec l'interface S_{ij} et \mathbf{M}_{ij} est le centre de S_{ij} . \mathbf{n}_{ij} est la normale extérieure à K_i , portée par S_{ij} . $\mathcal{Y}(i)$ est l'ensemble des indices des voisins de K_i .

Hypothèses sur le maillage

• $Q_{ij} \in S_{ij}$, ce qui n'est pas le cas *a priori*.



• \mathbf{B}_i est dans le tétraèdre formé par les centres des cellules voisines.



Ces hypothèses s'avèrent peu restrictives. Les maillages ne génèrent en général pas de maille aussi déformée.

Formulation volumes finis

Intégration sur $K_i \subset \Omega_h$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} U \, d\mathbf{x} \right) + \int_{\partial K_i} \mathbf{F}(U) \cdot \mathbf{n}_{\partial K_i} \, ds = 0.$$

Formulation volumes finis

$$|K_i| \frac{dU_i(t)}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{Y}(i)} |S_{ij}| \mathbf{F}_{i,j}(t, U_{i,j}(t), U_{j,i}(t)) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (*)$$

où $\mathbf{F}_{i,j}$ est un flux numérique à définir et $U_{i,j}$ la valeur de l'inconnue du côté "gauche" de l'interface S_{ij} . La montée en ordre MUSCL se fait généralement en calculant une reconstruction \mathbb{P}_1 de $U_{i,j}$.

Reconstruction d'ordre 2 multi-pentes

La méthode que nous proposons permet par essence de tenir compte **facilement** de l'information dans toutes les directions. Nous considérons une pente dans chaque direction $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$. ($\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij}$ ou \mathbf{M}_{ij})

$$\forall j \in \mathcal{Y}(i), \quad U_{i,j} = U_i + p_{ij} \|\mathbf{B}_i, \mathbf{X}_{ij}\|$$

ou sous une forme locale

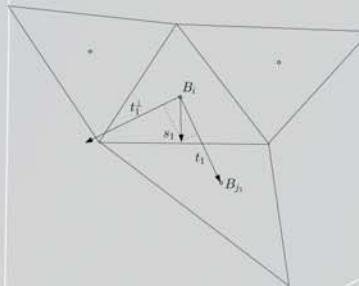
$$\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad U_{i,j_k} = U_i + p_k \|\mathbf{B}_i, \mathbf{X}_{ij_k}\|$$

Principe d'une reconstruction en Q_{ij}

1. On définit les directions $\mathbf{t}_k = \frac{\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{j_k}}{\|\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{j_k}\|}$
2. Projection (maillage non singulier) $\mathbf{t}_k = \sum_{l \neq k} \beta_{kl} \mathbf{t}_l$
3. Pente de référence est $p_k^+ = \frac{U_{j_k} - U_i}{\|\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{j_k}\|}$
4. Pente suivant $-\mathbf{t}_k$ $p_k^- = \sum_{l \neq k} \beta_{kl} p_l^+$
5. Limitation $p_k = \psi(p_k^+, p_k^-)$

Principe d'une reconstruction en M_{ij}

1. Nouvelles directions $\mathbf{s}_k = \frac{\mathbf{B}_i, \mathbf{M}_{j_k}}{\|\mathbf{B}_i, \mathbf{M}_{j_k}\|}$
2. Orthogonal à \mathbf{t}_k $\mathbf{t}_k^\perp = \frac{\mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{t}_k}{\|\mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{t}_k\|}$



3. Projection de \mathbf{s}_k $\mathbf{s}_k = \alpha_k \mathbf{t}_k + \beta_k \mathbf{t}_k^\perp$
4. Projection de \mathbf{t}_k^\perp $\mathbf{t}_k^\perp = \sum_{l \neq k} \pi_{kl} \mathbf{t}_l$
5. Pente suivant \mathbf{s}_k $q_k^+ = \alpha_k p_k^+ + \beta_k \sum_{l \neq k} \pi_{kl} p_l^+$
6. Pente suivant $-\mathbf{s}_k$ $q_k^- = \sum_{l \neq k} \beta_{kl} q_l^+$
7. Limitation $q_k = \psi(q_k^+, q_k^-)$

Critères de stabilité

Nous avons choisi d'étudier le critère LED-P qui requière à la fois que le schéma soit LED (Local Extremum Diminishing) et Positif (sous une condition de type CFL). Ceci implique en particulier que le schéma respecte le *principe du maximum local* qui est un des critères les plus étudiés dans la littérature.

Le schéma (*) est LED-P s'il peut s'écrire comme suit

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \sum_{j \in \mathcal{Y}(i)} c_{ij} (U_j - U_i) \quad \text{avec } c_{ij} \geq 0$$

Travaux en cours

- **Modélisation et simulation d'un jet de plasma**
 - Simulation d'un jet turbulent (avec la collaboration de Thierry Dubois¹)
 - Modélisation d'un jet en sortie de torche à plasma (avec la collaboration de Gilles Mariaux²)
- **Simulation de l'écoulement à l'intérieur d'une torche à plasma**
 - Une nouvelle méthode de type MUSCL (avec la collaboration de Stéphane Clain³ et Thierry Buffard¹)
 - Résolution des équations d'Euler par une méthode volumes finis (avec la collaboration de Stéphane Clain)

Conditions requises pour la stabilité

La reconstruction de l'inconnue au niveau des interfaces doit vérifier l'une des propriétés suivantes pour obtenir la stabilité souhaitée.

• Convexité

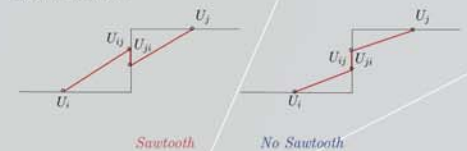
$$U_{i,j} = U_i + \theta_{ij}(U_j - U_i), \quad 0 \leq \theta_{ij} \leq 1. \quad (i)$$

• **No sawtooth** dans chaque direction $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$

$$U_i \leq U_{i,j} \leq U_{j,i} \leq U_j, \quad \text{si } U_i \leq U_j, \quad (ii)$$

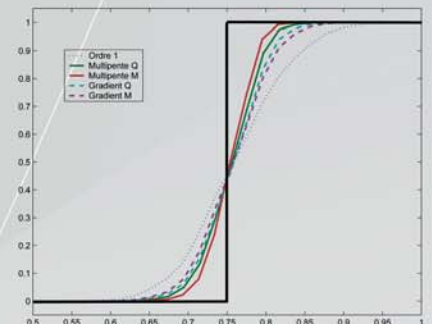
$$U_j \leq U_{j,i} \leq U_{i,j} \leq U_i, \quad \text{si } U_j \leq U_i.$$

On montre que (i) implique LED et que (ii) implique le caractère LED-P.



Résultats

- Le schéma multi-pentes en Q_{ij} est LED-P car le caractère *No sawtooth* dans chaque direction est acquis grâce à l'utilisation d'un limiteur *minmod*.
- Le schéma multi-pentes en M_{ij} est LED.



Ordre 1	$C (\times 10^{-2})$	α	Gradient	$C (\times 10^{-2})$	α
Régulier	1.7	0.7	Régulier	1.3	0.8
Discont.	7.5	0.4	Discont.	7.4	0.4

multi Q_{ij}	$C (\times 10^{-2})$	α	multi M_{ij}	$C (\times 10^{-2})$	α
Régulier	1.8	1.0	Régulier	4.2	1.3
Discont.	5.3	0.5	Discont.	5.9	0.6

Convergence en norme L^1 des méthodes, dans un cas régulier et un cas discontinu. ($\log \varepsilon_{L^1} = \alpha \log \Delta x + \log C$)

Gradient	Complexité	gain en temps
Régulier	205%	16
Discont.	205%	9

multi Q_{ij}	Complexité	gain en temps
Régulier	125%	190
Discont.	125%	60

multi M_{ij}	Complexité	gain en temps
Régulier	150%	1130
Discont.	150%	300

Complexité et gain en temps de calcul (à précision égale) des méthodes relativement à la méthode d'ordre 1.

La méthode multi-pentes est d'ordre 2, stable, rapide et facile à implémenter.

¹ Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques, Campus Universitaire des Cézeaux, 63177 Aubière

² Université de Limoges, ENSI, 16 rue d'Atlantis, Parc Ester Technopôle, BP 6094, 87068 Limoges

³ Université de Toulouse 3, Laboratoire MIP, 31062 Toulouse