Universität Stuttgart

Fakultät 8

Un schéma simplectique pour la formulation corotationnelle

Julien Salomon, Alexander Weiß, Barbara Wohlmuth

I. Modèle

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné régulier de frontière $\Gamma := \partial\Omega$ décrivant un corps élastique de type Saint Venant-Kirchhoff de densité $\rho(x)$ soumis à des forces volumiques f et surfaciques g. On note $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbf{R}^2$ la déformation. La dynamique de ce système est décrite par la formulation faible:

$$\int_\Omega \rho\ddot{\varphi}\eta + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial F} W(E(\varphi - x)) : \nabla\eta = \int_\Omega f\eta + \int_\Gamma g\eta, \quad (1)$$

où $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$, F est un déformation générique. Pour un déplacement $d(x,t) = \varphi(x,t) - x$, l'énergie emmagasinée $W\big(E(d)\big)$ est donnée par:

$$W\big(E(d)\big) = \frac{\lambda}{2}\Big(tr\big(E(d)\big)\Big)^2 + \mu\, tr\big(E(d)^2\big),$$

où λ et μ sont les paramètres de Lamé et

$$E(d) = \frac{1}{2}(\nabla d + \nabla d^T + \nabla d^T \nabla d).$$

II. Formulation Corotationnelle

La non-linéarité de (1) rend sa résolution très couteuse et une linéarisation par rapport à d ne donne pas de résultats satisfaisants.

Pour linéariser de manière efficace, on décompose le mouvement en un mouvement global et une petite déformation u:

$$\varphi(x,t) = T(t) + R_\theta(t)(x + u(x,t)),$$

où T et R_θ sont une translation et une rotation globale. Une propriété importante de cette décomposition est que $E\big(\varphi - x\big) = E(u)$ qui permet de linéariser (1) suivant u par $E(\varphi - x) \approx \varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$. Après calcul, on obtient:

$$\int_\Omega \rho\ddot{\varphi}\eta + \int_\Omega R_\theta \sigma(u) : \varepsilon(\eta) = \int_\Omega f\eta + \int_\Gamma g\eta, \quad (2)$$

où $\sigma(u) := \lambda tr\big(\varepsilon(u)\big)I + 2\mu\varepsilon(u)$. Pour simplifier la présentation, on introduit les vitesse et accélération relatives:

$$s(x,t) = R_\theta^T(t)\big(\dot{\varphi}(x,t) - \dot{T}(t)\big) = \dot{u}(x,t) + \dot{\theta}(t)\Pi\big(x + u(x,t)\big).$$

$$\ddot{\varphi}(x,t) = \ddot{T}(t) + R_\theta(t)\Big(\dot{s}(x,t) + \dot{\theta}(t)\Pi s(x,t)\Big).$$

III. Discrétisation en temps

Pour discrétiser en temps (2), on adopte une discrétisation de type point milieu:

$$\star_{n+1/2} = \frac{\star_{n+1} + \star_n}{2}, \quad \dot{\star}_{n+1/2} = \frac{\star_{n+1} - \star_n}{\Delta t},$$

où Δt est le pas de temps, n l'index correspondant et $\star$ la quantité discrétisée

IV. Schéma simplectique

Translation globale - Le terme de translation est défini par:

$$\dot{T}_{n+1} = \dot{T}_n + \frac{\Delta t}{\mathcal{M}}\left(\int_\Omega f_{n+1/2} + \int_\Gamma g_{n+1/2}\right),$$

ce qui implique que $\int_\Omega \rho u_n = 0$.

Petites déformations - On définit la discrétisation de la vitesse relative en $n + 1/2$ par:

$$s_{n+1/2}(x) = \dot{u}_{n+1/2}(x) + \dot{\theta}_{n+1/2}\Pi\big(x + u_{n+1/2}(x)\big),$$

ainsi que la discrétisation de (2) par (on considère $\int_\Omega v = 0$):

$$\int_\Omega \rho(\dot{s}_{n+1/2} + \dot{\theta}_{n+1/2}\Pi s_{n+1/2}).v + \int_\Omega \sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(v) = \int_\Omega R^T_{\theta_{n+1/2}} f_{n+1/2}.v + \int_\Gamma R^T_{\theta_{n+1/2}}.g_{n+1/2}.v. \quad (3)$$

Rotation globale - Introduisons le moment et l'énergie cinétique:

$$\gamma_n = \int_\Omega R_{\theta_n}\dot{s}_n . R_{\theta_n}\Pi(x + u_n),$$

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\mathcal{M}\dot{T}_n^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho s_n^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n).$$

On montre que (3) implique:

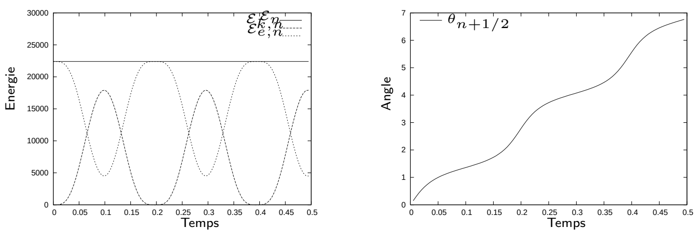
$$\frac{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n}{\Delta t} + \dot{\theta}_{n+1/2}\int_\Omega \sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(\Pi u_{n+1/2}) = \int_\Omega f_{n+1/2}.\dot{\varphi}_{n+1/2} + \int_\Gamma g_{n+1/2}.\dot{\varphi}_{n+1/2},$$

$$\frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\Delta t} + \int_\Omega \sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(\Pi u_{n+1/2}) = \int_\Omega f_{n+1/2}.s_{n+1/2} + \int_\Gamma g_{n+1/2}.s_{n+1/2}.$$

Définissant θ_{n+1} comme racine de $\int_\Omega \sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(\Pi u_{n+1/2})$, on obtient donc un schéma simplectique, garantissant de surcroît la conservation du moment cinétique.

V. Test numérique

On teste le schéma sur l'exemple d'un disque élastique en rotation lancé par un couple au moment initial. L'angle est calculé en 2-3 itérations d'un pseudo schéma de Newton.



Evolution de l'énergie et de l'angle au cours du temps.

Contact: Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation
Numerische Mathematik für Höchstleistungsrechner
E-Mail: `seka7@ians.uni-stuttgart.de`

Ce travail est financé par une bourse post-doctorale de l'Université de Stuttgart.