Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université
de Technologie de Compiègne
BP 20.529, Compiègne Cedex, France
Tél: 33(0) 3 44 23 47 81, fax : 33 (0) 3 44 23 19 80, e-mail:nverdier@hds. utc.fr

Estimation d'une source de pollution

Nathalie Verdière

MODELES

Modèle initial:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,.) + V\frac{\partial u}{\partial x}(t,.) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,.) + Ru(t,.) = \lambda(t)\delta(.-a) \text{ dans } [0,T]\times]0,L[, \\ u(0,x) = g(x),\ x \in]0,L[, \\ u(t,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0,\ t \in]0,T[. \end{cases}$$

Observation: $y = u(t,L)$

But: Estimer λ et a.

Modèle approché:

- Approximation de δ par la fonction gaussienne $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$,
- Semi-discrétisation du système selon un shéma aux différences finies centré,

d'où: ($v_i(t) = u(t,x_i)$, $l = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{a^2}{\sigma^2}}$, $Q = e^{h\frac{2a}{\sigma^2}}$)

$$(S_N) \begin{cases} \dot v_1(t) = \beta v_1(t) + \gamma v_2(t) + k_1 l(t)Q, \\ \dot v_i(t) = \alpha v_{i-1}(t) + \beta v_i(t) + \gamma v_{i+1}(t) + k_i l(t) l(t) Q^i, \text{ i=2,...,N-1}, \\ \dot v_N(t) = \alpha' v_{N-1}(t) + \beta v_N(t) + k_N l(t) Q^N, \end{cases}$$

Observation: $y = v_N$.

But: Estimer l et Q.

RESULTATS THEORIQUES

Théorème

Supposons que $\dot v_N(0) - \alpha' v_{N-1}(0) - \beta v_N(0) > 0$ et que $\lambda(0) = \lambda_0 > 0$, $v_i(0) \geq 0$ pour $i = 1,\ldots,N$ soient connus.
Alors, si on observe $y = v_N$, le modèle (S_N) est identifiable en $(l,Q) \in \mathcal{L} \times I\!R^+$, donc $\lambda \in \mathcal{L}$ et $a \in I\!R$ également.

Identifiabilité et estimation de a:

Conditions initiales $\Rightarrow$
$$\begin{cases} a_1 = L - \sqrt{\sigma^2 \mid log\left(\frac{c\lambda(0)}{\dot v_N(0) - \alpha' v_{N-1}(0) - \beta v_N(0)}\right) \mid}, \\ a_2 = L + \sqrt{\sigma^2 \mid log\left(\frac{c\lambda(0)}{\dot v_N(0) - \alpha' v_{N-1}(0) - \beta v_N(0)}\right) \mid}. \end{cases} \quad (1)$$

Identifiabilité et estimation de λ:

Méthode d'élimination (Algorithme de Rosenfeld-Groebner)

l est solution de:
$$f_N(t) + \sum_{i=0}^{N-1} c_{N,i} l^{(i)}(t) = 0, \qquad (2)$$
avec $(c_{N,i})_{i=0,\ldots,N-1}$ une suite de réels dépendant de Q,
$f_N(t)$ une fonction linéaire en y et ses dérivées.

Conditions initiales

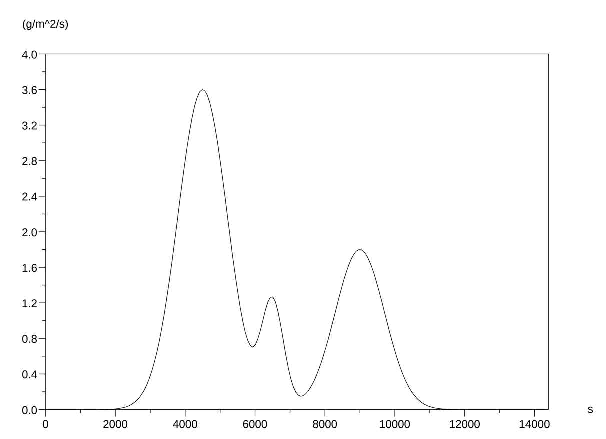
Utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz $\Longrightarrow$ unicité de l.

RESULTATS NUMERIQUES

Données initiales

$T = 4h$, $L = 1000m$, $V = 0.66m/s$, $R = 10^{-5}/s$, $D = 5m^2/s$.
$a = 621m$ et λ est construit à partir de la fonction
$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{3} 3\alpha_i e^{-\beta_i(t-\tau_i)^2},$$
avec $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 0.4$, $\alpha_3 = 0.6$,
$\beta_1 = 10^{-6}$, $\beta_2 = 5.10^{-6}$, $\beta_3 = 10^{-6}$,
$\tau_1 = 4500s$, $\tau_2 = 6500s$, $\tau_3 = 9000s$.

λ est représenté par la courbe:



Courbe débit initial

Algorithme

(1) et (2) dépendent du paramètre σ qu'il faut déterminer. Soit $\tilde\sigma$ donné et $a_{\tilde\sigma}$, $\lambda_{\tilde\sigma}$ la position et le débit calculés à partir de celui-ci. Soit $y_{\tilde\sigma}$ la concentration de substrat calculée à partir de (S_N) avec σ remplacé par $\tilde\sigma$ et a, λ remplacés respectivement par $a_{\tilde\sigma}$, $\lambda_{\tilde\sigma}$. Soit y la concentration de substrat observée.

1: Pour $\tilde\sigma$ **de** 0.01 **à** 0.5
- estimation de $a_{\tilde\sigma}$ et $\lambda_{\tilde\sigma}$ en utilisant (1) et (2).
- estimation de $y_{\tilde\sigma}$ en reprenant (S_N) et en utilisant la fonction ode de scilab.
- estimation de l'erreur relative

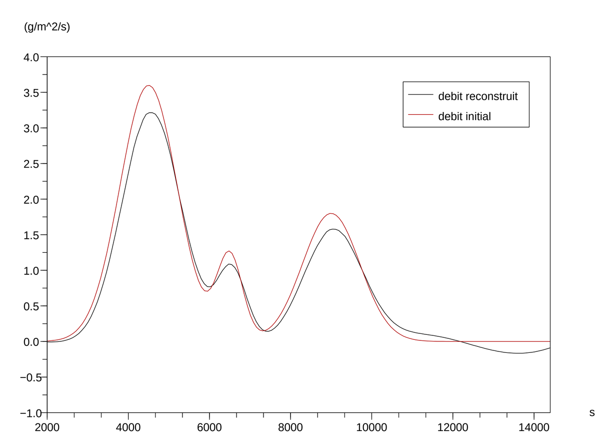
$$e_{\tilde\sigma} = 0.5\frac{norm(y - y_{\tilde\sigma})}{norm(y)}$$

fin pour

2: Recherche de l'erreur relative minimale, qui conduira à l'estimation de $\tilde a$, $\tilde\lambda$.

Résultats

$\tilde a = 622m$ et la courbe débit:



Courbes débit