Résolution numérique 2 échelles des équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles

Emmanuel FRENOD[a], Alexandre MOUTON[b], Eric SONNENDRUCKER[b]

[a] LEMEL, Université de Bretagne Sud, Vannes

Laboratoire d'Etude et de Modélisation des Environnements Littoraux

[b] IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Institut de Recherche Mathématique Avancée

frenod@univ-ubs.fr, mouton@math.u-strasbg.fr, sonnen@math.u-strasbg.fr

1 Introduction

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour les équations d'Euler aussi bien compressibles qu'incompressibles. Cependant, la zone de transition, i.e. les équations d'Euler faiblement compressibles posent problème à la plupart des solveurs. Nous proposerons ici une approche originale pour résoudre ce problème sur les équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles (EIFC) :

- on utilise la théorie de l'homogénéisation 2 échelles de G. Allaire et G. N'Guetseng pour développer un nouveau modèle lorsque le nombre de Mach tend vers 0,
- on résout numériquement ce nouveau modèle à l'aide d'une méthode de volumes finis (on utilise une linéarisation de Roe),
- on compare ces résultats numériques à ceux obtenus à partir d'une résolution directe du modèle de départ (méthode de volumes finis et linéarisation de Roe).

2 Homogénéisation 2 échelles des équations EIFC

2.1 Modèle de départ

On part du modèle de Navier-Stokes 1D introduit par Grenier[2] :

$$\partial_t u^\epsilon - \alpha\,\partial_x^2 u^\epsilon + \frac{1}{2}\partial_x\big((u^\epsilon)^2\big) + \frac{\partial_x\big(p(\tilde\rho^\epsilon)\big)}{\epsilon^2\tilde\rho^\epsilon} = 0 \qquad (1)$$
$$\partial_t\tilde\rho^\epsilon + \partial_x(\tilde\rho^\epsilon u^\epsilon) = 0 \qquad (2)$$
$$u^\epsilon_{|t=0} = u_0^\epsilon \qquad (3)$$
$$\tilde\rho^\epsilon_{|t=0} = \tilde\rho_0^\epsilon \qquad (4)$$

Puis on pose

$$\rho^\epsilon = \frac{\tilde\rho^\epsilon - 1}{\epsilon} \qquad \text{et} \qquad q^\epsilon(\rho^\epsilon) = \frac{p''(1)-2}{2}(\rho^\epsilon)^2 + \epsilon q_1^\epsilon(\rho^\epsilon)$$

en supposant que la pression p soit suffisamment régulière, que $p'(1) = 1$ et que $q_1^\epsilon(\rho^\epsilon)$ soit dérivable au moins une fois en ρ^ϵ. On obtient

$$\partial_t u^\epsilon - \alpha\,\partial_x^2 u^\epsilon + \frac{1}{2}\partial_x\big((u^\epsilon)^2\big) + \partial_x\big(q^\epsilon(\rho^\epsilon)\big) + \frac{1}{\epsilon}\partial_x\rho^\epsilon = 0 \qquad (5)$$
$$\partial_t\rho^\epsilon + \partial_x(\rho^\epsilon u^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\partial_x u^\epsilon = 0 \qquad (6)$$
$$u^\epsilon_{|t=0} = u_0^\epsilon \qquad (7)$$
$$\rho^\epsilon_{|t=0} = \rho_0^\epsilon \qquad (8)$$

Théorème 1 (E. Grenier). *Supposons que les suites $(u_0^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\rho_0^\epsilon)_{\epsilon>0}$ soient dans $H^s(\mathbb{T}^1)$ ($s > 3/2$) et qu'elles convergent fortement dans cet espace vers u_0 et ρ_0 respectivement. Alors il existe un $T > 0$ tel que le système (5)-(8) admet des solutions $u^\epsilon, \rho^\epsilon$ dans $\mathcal{C}^0\big(0,T;H^s(\mathbb{T}^1)\big)$ bornées indépendamment de ϵ dans cet espace.*

2.2 Homogénéisation 2 échelles

Dans toute la suite on suppose que $u_0^\epsilon = u_0$, $\rho_0^\epsilon = \rho_0$ et on suppose que la pression p est définie par $p(\rho) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$ où γ est le coefficient adiabatique du fluide étudié. On définit les fonctions suivantes :

$$f^\epsilon(x,t) = \Big(u^\epsilon(x+\frac{t}{\epsilon},t) + \rho^\epsilon(x+\frac{t}{\epsilon},t) - \frac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big)$$
$$b^\epsilon(x,t) = \Big(u^\epsilon(x-\frac{t}{\epsilon},t) - \rho^\epsilon(x-\frac{t}{\epsilon},t) - \frac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big)$$

avec $\overline{u} = \int_{\mathbb{T}^1} u_0(x)\,dx$ et $\overline{\rho} = \int_{\mathbb{T}^1}\rho_0(x)\,dx$. De plus, on a les conditions intiales suivantes :

$$f^\epsilon(x,0) = \Big(u_0(x) + \rho_0(x) - \frac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big)$$
$$b^\epsilon(x,0) = \Big(u_0(x) - \rho_0(x) - \frac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big)$$

Alors f^ϵ et b^ϵ vérifient :

$$2\,\partial_t f^\epsilon + \epsilon\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\big(f^\epsilon(x,t) - b^\epsilon(x+\tfrac{2t}{\epsilon},t) + \tfrac{\overline{\rho}}{2\pi}\big)\Big) + \partial_x\Big(\tfrac{p''(1)+2}{2}(f^\epsilon)^2 + \tfrac{p''(1)-2}{2}\big(b^\epsilon(x+\tfrac{2t}{\epsilon},t)\big)^2 + \tfrac{2\overline{u}+p''(1)\overline{\rho}}{2\pi}f^\epsilon + \tfrac{(2-p''(1))\overline{\rho}}{2\pi}b^\epsilon(x+\tfrac{2t}{\epsilon},t)\Big) = 0$$

$$2\,\partial_t b^\epsilon + \epsilon\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\big(f^\epsilon(x-\tfrac{2t}{\epsilon},t) - b^\epsilon(x,t) + \tfrac{\overline{\rho}}{2\pi}\big)\Big) + \partial_x\Big(\tfrac{p''(1)+2}{2}(b^\epsilon)^2 + \tfrac{p''(1)-2}{2}\big(f^\epsilon(x-\tfrac{2t}{\epsilon},t)\big)^2 + \tfrac{2\overline{u}-p''(1)\overline{\rho}}{2\pi}b^\epsilon - \tfrac{(2-p''(1))\overline{\rho}}{2\pi}f^\epsilon(x-\tfrac{2t}{\epsilon},t)\Big) = 0$$

Les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ étant bornées dans $L^2\big(0,T;H^s(\mathbb{T}^1)\big)$, elles admettent des limites faibles dans cet espace, notées F et B respectivement, lorsque $\epsilon \to 0$. Alors en multipliant les équations ci-dessus par une fonction test φ sur $[0,T) \times \mathbb{T}^1$ et en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient :

$$-2\int_{\mathbb{T}^1} F(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx = \int_0^T\int_{\mathbb{T}^1} 2F\,\partial_t\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\mathbb{T}^1}\Big(\frac{p''(1)+2}{2}F^2 + \frac{2\overline{u}+p''(1)\overline{\rho}}{2\pi}F\Big)\partial_x\varphi\,dx\,dt$$

$$-2\int_{\mathbb{T}^1} B(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx = \int_0^T\int_{\mathbb{T}^1} 2B\,\partial_t\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\mathbb{T}^1}\Big(\frac{p''(1)+2}{2}B^2 + \frac{2\overline{u}-p''(1)\overline{\rho}}{2\pi}B\Big)\partial_x\varphi\,dx\,dt$$

ce qui est la formulation faible de

$$2\partial_t F + \partial_x\Big(\frac{p''(1)+2}{2}F^2 + \frac{2\overline{u}+p''(1)\overline{\rho}}{2\pi}F\Big) = 0 \qquad (9)$$
$$F(x,0) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x) + \rho_0(x) - \frac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big) \qquad (10)$$
$$2\partial_t B + \partial_x\Big(\frac{p''(1)+2}{2}B^2 + \frac{2\overline{u}-p''(1)\overline{\rho}}{2\pi}B\Big) = 0 \qquad (11)$$
$$B(x,0) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x) - \rho_0(x) - \frac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big) \qquad (12)$$

dans $L^2\big(0,T;H^s(\mathbb{T}^1)\big)$.

Finalement, on pose

$$U(x,\tau,t) = F(x-\tau,t) + B(x+\tau,t) + \frac{\overline{u}}{2\pi}$$
$$R(x,\tau,t) = F(x-\tau,t) - B(x+\tau,t) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}$$

En utilisant la théorie de G. Allaire[1], on constate que ces fonctions sont les limites 2 échelles des suites $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $L^2\big([0,T) \times \mathbb{T}^1; H^s(\mathbb{T}^1)\big)$. Enfin, on a le résultat suivant :

Théorème 2. *Si $s > 3/2$, alors il existe 2 constantes $C, C' > 0$ telles que pour tout $\epsilon > 0$, on ait :*

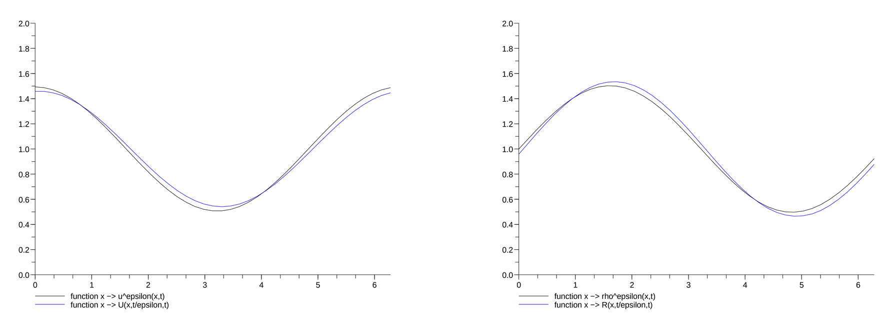
$$\int_0^T \Big\|u^\epsilon(\cdot,t) - U\big(\cdot,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{T}^1)}dt \le C\epsilon^2 \qquad (13)$$
$$\int_0^T \Big\|\rho^\epsilon(\cdot,t) - R\big(\cdot,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{T}^1)}dt \le C'\epsilon^2 \qquad (14)$$

3 Résolution numérique du modèle homogénéisé

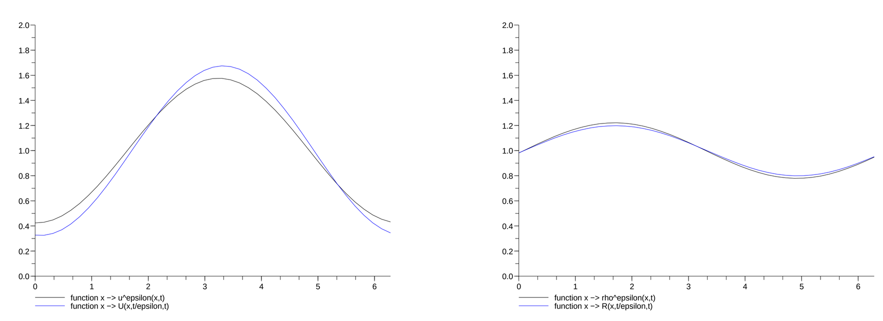
L'objectif est donc d'approcher les solutions $u^\epsilon(x,t), \rho^\epsilon(x,t)$ du système (5)-(8) par des approximations de $U(x,\frac{t}{\epsilon},t)$ et $R(x,\frac{t}{\epsilon},t)$ Pour la résolution des 2 systèmes, nous utiliserons une méthode de volumes finis avec linéarisation de Roe (voir [3]).

- On résout numériquement le système (1)-(4) et on approche u^ϵ et $\tilde\rho^\epsilon$ et on en déduit une approximation de ρ^ϵ. On note ces résultats u_h^ϵ et ρ_h^ϵ.
- On résout numériquement le système (9)-(12) en F et B, et on reconstruit U et R. On en déduit alors une approximation de $(x,t) \mapsto U(x,\frac{t}{\epsilon},t)$ et $(x,t) \mapsto R(x,\frac{t}{\epsilon},t)$. On note ces résultats U_h^ϵ et R_h^ϵ.
- On compare u_h^ϵ à U_h^ϵ et ρ_h^ϵ à R_h^ϵ.

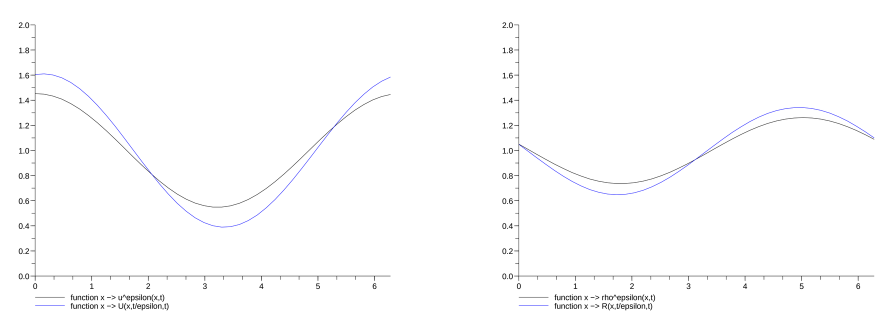
Exemple 3. *Avec $u_0(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{2}$ et $\rho_0(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{2}$, $\gamma = 1$, $T = 10^{-2}$, 40 points en x et 10^3 points en t.*



$t = 0$



$t = 0.02$



$t = 0.05$

Nous avons comparé les temps de calculs sur un cas construit à partir des conditions suivantes : $u_0 = 1 + \frac{\cos(x)}{2}$ et $\tilde\rho_0(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{2}$, ainsi que $\gamma = 1$, $T = 1$:

Valeur de ϵ	Système (9)-(12) $N_t = 100$	$N_t = 1000$	Système (1)-(4)
10^{-2}	4 sec 2'	41 sec 1'	4 sec 7' ($N_t = 10^3$)
10^{-3}	4 sec 3'	42 sec 6'	51 sec 6' ($N_t = 10^4$)
10^{-4}	4 sec 2'	40 sec 3'	16 min 9 sec ($N_t = 10^5$)

La cause de ce problème est que la condition CFL est en $\frac{1}{\epsilon}$ pour le système (1)-(4), alors qu'elle est indépendante de ϵ pour le système (9)-(12).

4 Bibliographie

[1] ALLAIRE, G. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal. 23*, 6 (1992), 1482-1518.

[2] GRENIER, E. Oscillatory pertubation of the Navier-Stokes equations. *J. Math. Pures. Appl. 76* (2001), 477-498.

[3] LEVEQUE, R. Finite volume methods for hyperbolic problems, *Cambridge texts in Applied mathematics* (2002).

INRIA Projet CALVI