

Interpolation conservative basée sur l'intersection de maillages en dimension 2

Michel Mehrenberger Frédéric Alauzet INRIA Rocquencourt

Motivations et Problématique

But :

- Effectuer une projection qui conserve la masse entre deux maillages triangulaires
- Analyse de l'impact sur une simulation eulérienne instationnaire

Equations d'Euler :

L'écoulement est modélisé par les équations d'Euler (gaz parfait, non visqueux, pas de diffusion thermique)

En notant ρ la densité, $U = (u_1, u_2, u_3)$ le vecteur vitesse, T la température et $E = T + \frac{|U|^2}{2}$ l'énergie totale, on a :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) = 0,$$

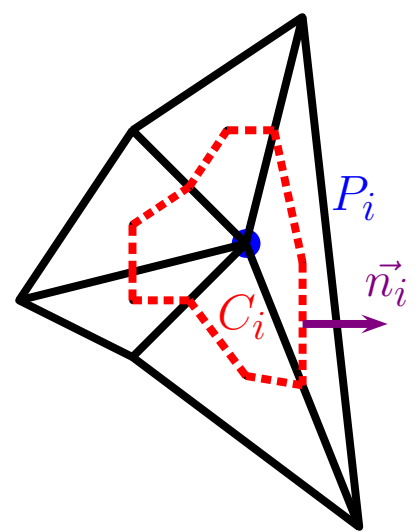
où $W = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho E)$ est le vecteur des variables conservatives et F représente l'opérateur advectif.

Schéma numérique :

- Maillage \mathcal{H}_n et Solution S^n
- Calcul de S^{n+1} par le solveur Euler
- Si on adapte le maillage (sinon $S^{n+1} := S^n$) :
- Génération de maillage \mathcal{H}_{n+1}**
- Interpolation de la solution S^{n+1}** sur le maillage \mathcal{H}_{n+1} pour obtenir S^{n+1} .

Solveur Euler :

Cellules de volume fini centrées aux points



$$|C_i| \frac{dW_i}{dt} + \sum_{j \neq i} \Phi(W_{ij}, W_{ji}, \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \vec{n}_i d\gamma) = 0$$

$$W_{ij} = W_i + 0.5(\nabla W)_{ij} \cdot P_i P_j$$

où $(\nabla W)_{ij}$ est une approximation du gradient obtenue par une combinaison de gradients centrés et décentrés, limité par une généralisation du limiteur superbee.

Calcul du flux Φ : solveur de Riemann HLLC.

Discrétisation en temps : schéma de Runge-Kutta.

Génération de maillage :

A partir de la solution S^{n+1} , un nouveau maillage \mathcal{H}_{n+1} est créé en se basant sur un estimateur d'erreur utilisant le Hessien de la solution.

Le maillage \mathcal{H}_n n'est pas forcément bien adapté à la solution S^{n+1} .

On a recours ici à des adaptations fréquentes.

Une alternative est d'adapter le maillage sur un intervalle de temps.

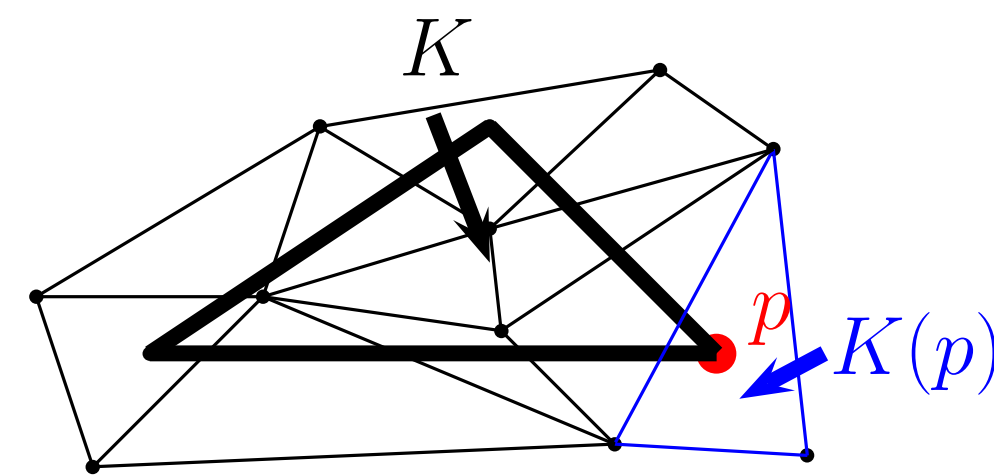
Interpolation de la solution :

Une fois un nouveau maillage généré, nécessité de projeter la solution de l'ancien maillage \mathcal{H}_n sur le nouveau \mathcal{H}_{n+1} .

⇒ Recherche d'une interpolation conservative entre deux maillages triangulaires

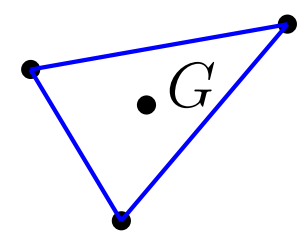
Localisation :

- Boucle sur les sommets p de \mathcal{H}_{n+1}
 - Détermination d'un triangle $K(p)$ de \mathcal{H}_n
- Boucle sur les triangles K de \mathcal{H}_{n+1}
 - Création d'une pile de triangles à traiter initialisée à $K(p)$, avec p sommet de K
 - Traitement de l'intersection de K avec le triangle courant de la pile
 - Rajout d'éléments voisins intersectant dans la pile
 - Vérification de recouvrement par le calcul de l'aire.



Reconstruction P1 conservative

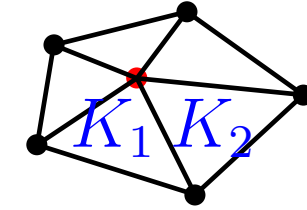
- On suppose f interpolation P1 sur maillage \mathcal{H}_n
- Calcul de $\int f$ et $\int \nabla f$ pour chaque intersection
- $\int f$ et $\int \nabla f$ connu sur chaque triangle de \mathcal{H}_{n+1}
- Reconstruction discontinue sur chaque triangle K de \mathcal{H}_{n+1}



$$f_K(G) = \frac{\int_K f}{|K|}, \quad \nabla f_K = \frac{\int_K \nabla f}{|K|}$$

$$f_K(M) = f_K(G) + \nabla f_K \cdot (M - G)$$

- Redistribution aux points : moyennisation



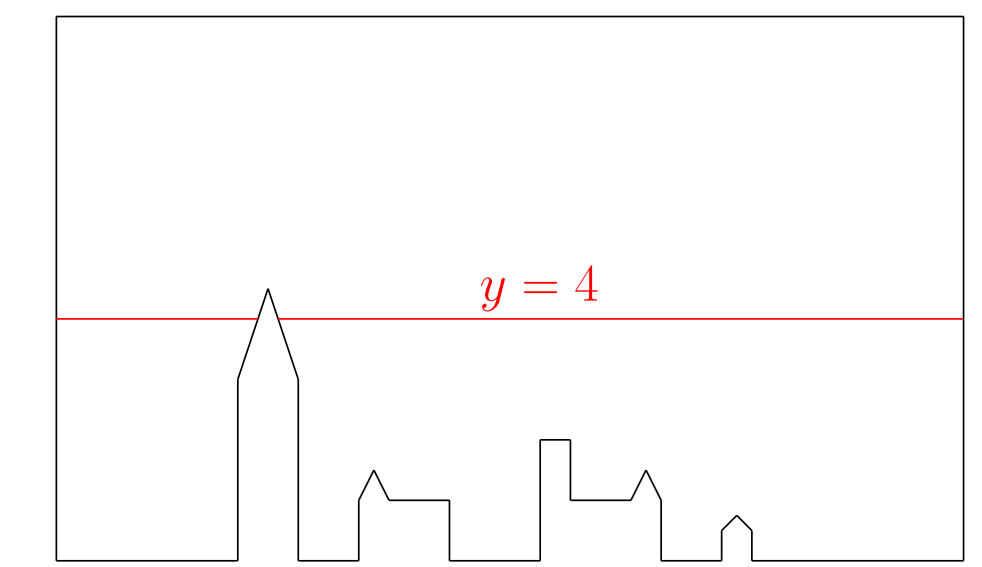
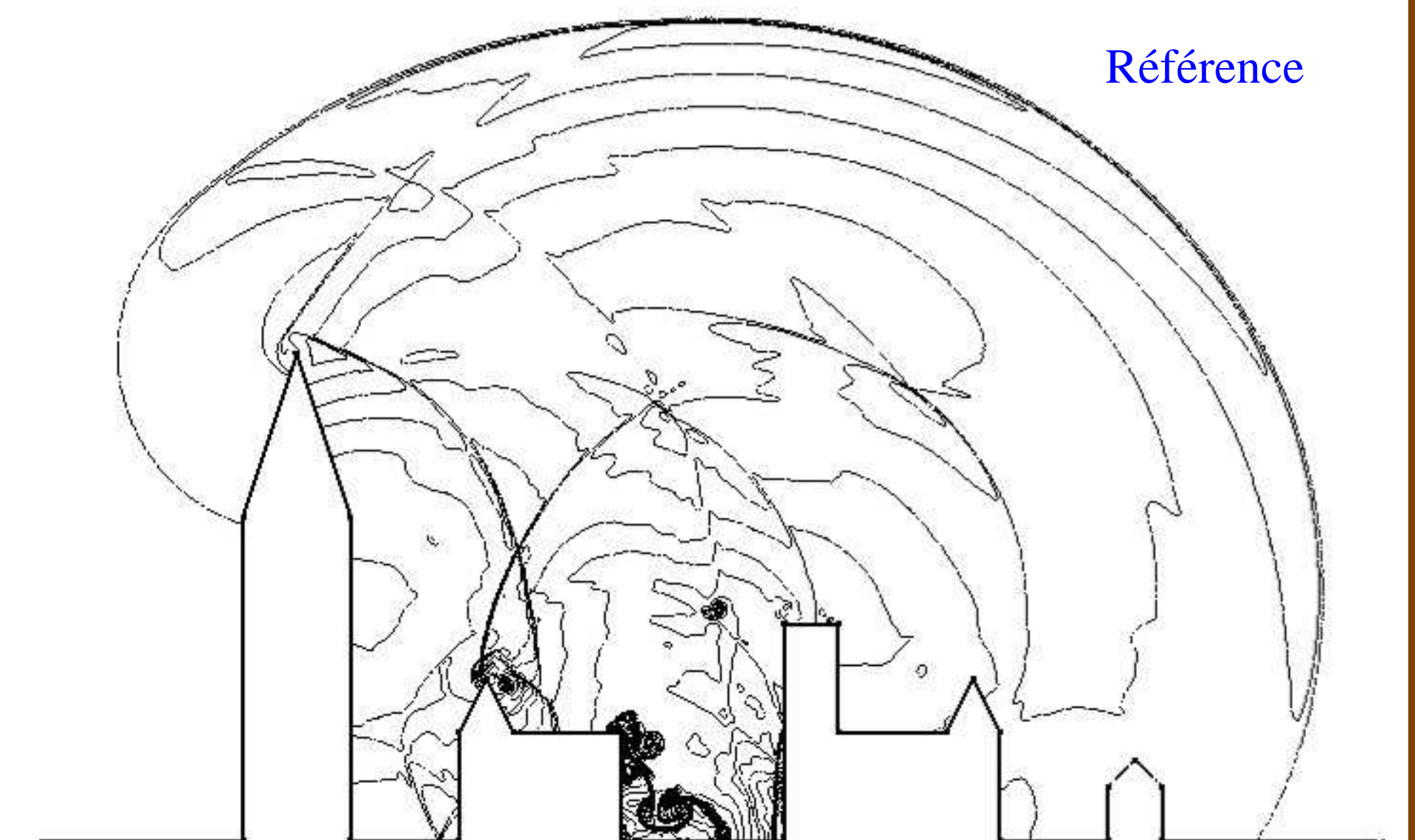
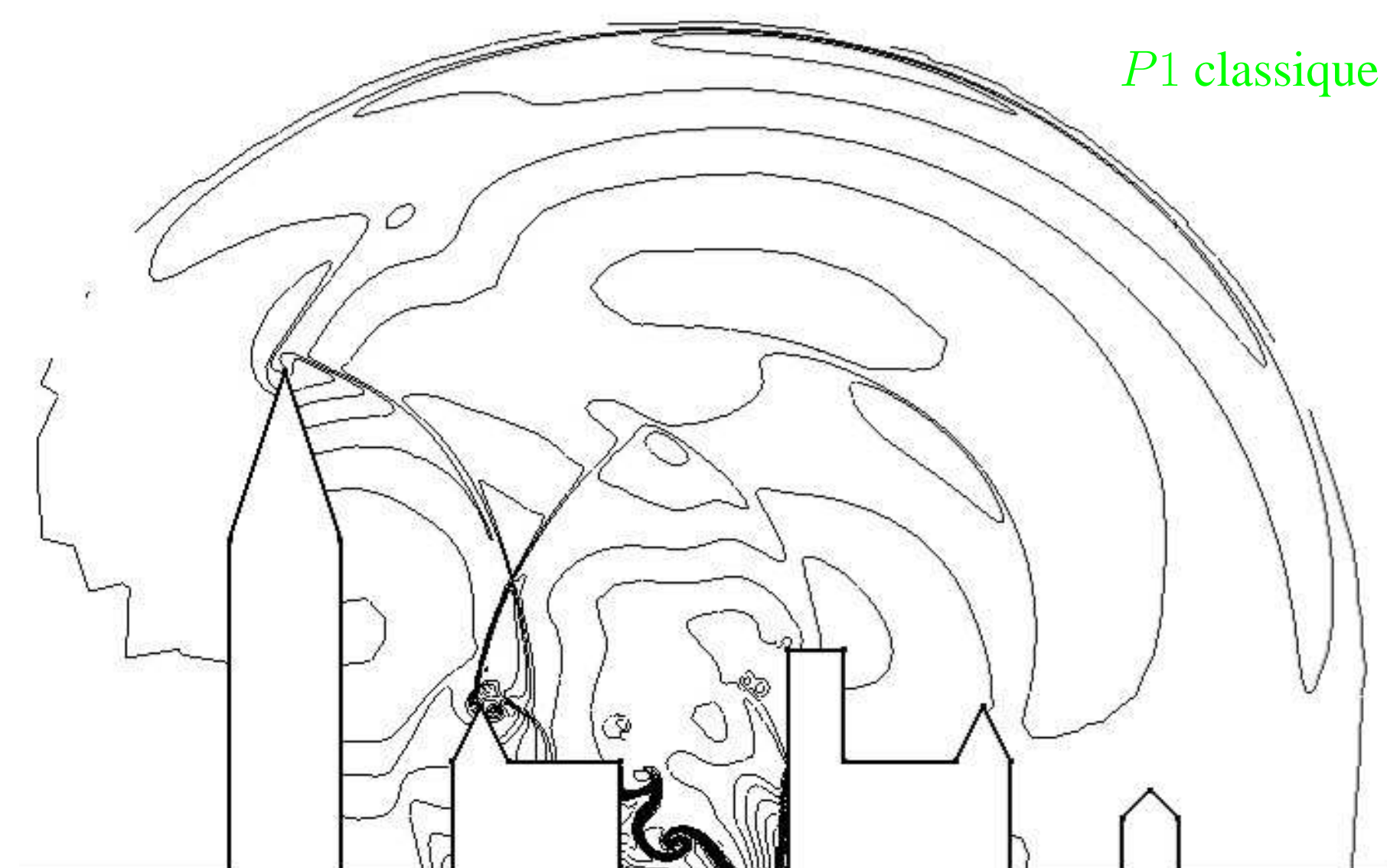
$$f(A) = \frac{\sum_i |K_i| f_{K_i}(A)}{\sum_i |K_i|}$$

- Correction pour vérifier le principe du maximum : avant moyennisation, en utilisant

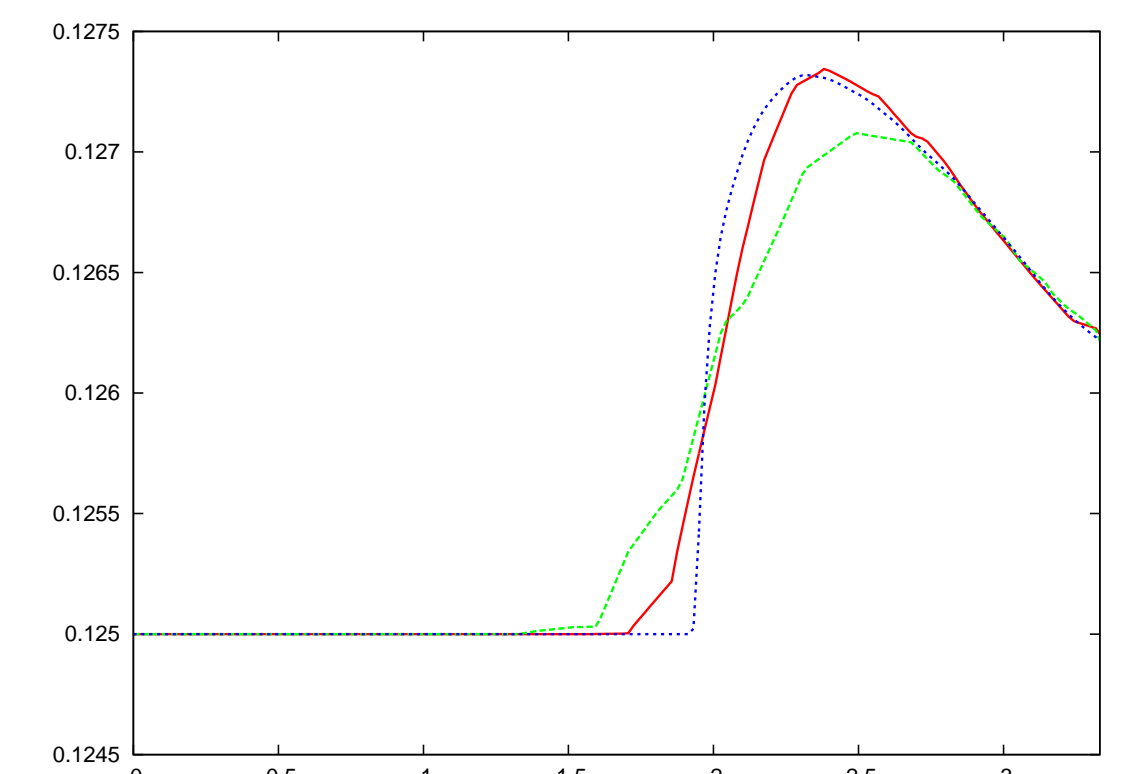
$$\min_{p \in \mathcal{H}_n} f(p) \leq f_K(G) \leq \max_{p \in \mathcal{H}_n} f(p)$$

Résultats

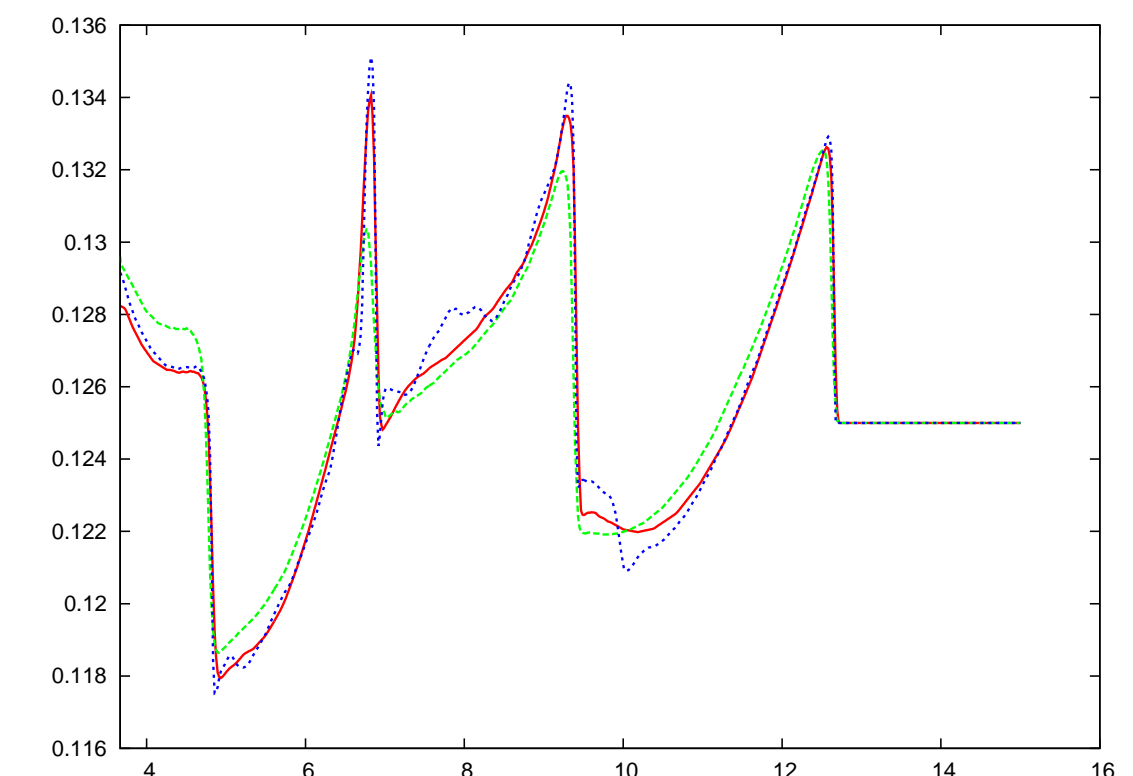
Simulation d'une explosion dans une ville



Valeur de la densité sur la droite d'équation $y = 4$ A gauche du clocher



A droite du clocher



P1 classique P1 conservatif Référence

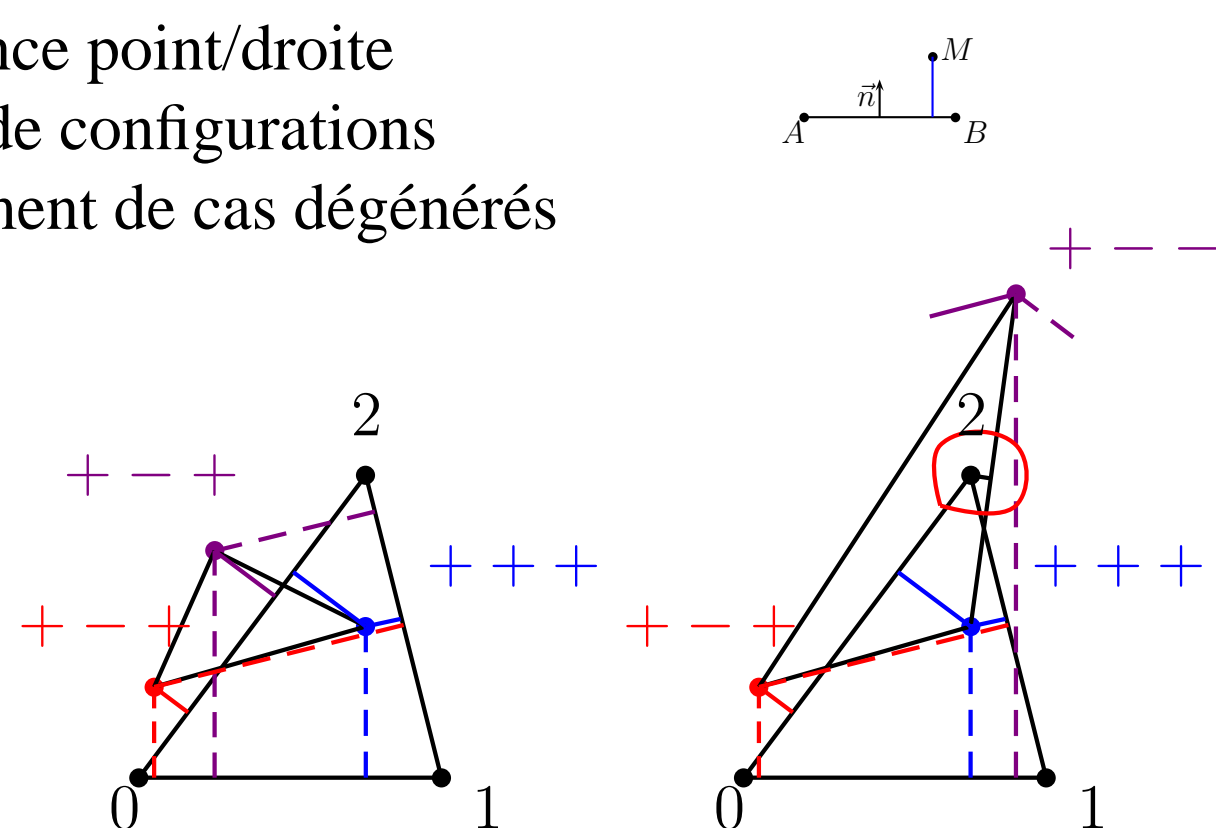
Références

- FRÉDÉRIC ALAUZET, *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*, Thèse Université de Montpellier II, 2003.
- L.G. MARGOLIN, M. SHASHKOV, *Second-Order Sign-Preserving conservative interpolation (remapping) on general grids*, J. Comp. Phys., 184 (2003), 266–298.

Intersection de maillages

Intersection de deux triangles :

Puissance point/droite
Etude de configurations
Traitement de cas dégénérés



Isovaleurs et maillage pour l'interpolation P1 classique (10315 noeuds) - pour l'interpolation P1 conservative (14630 noeuds) - Isovaleurs de la solution de référence (1345824 noeuds)

