Interpolation conservative basée sur l'intersection de maillages en dimension 2

Michel Mehrenberger Frédéric Alauzet INRIA Rocquencourt

Motivations et Problématique

But : • Effectuer une projection qui conserve la masse entre deux maillages triangulaires
• Analyse de l'impact sur une simulation eulérienne instationnaire

– **Equations d'Euler :**

L'écoulement est modélisé par les équations d'Euler (gaz parfait, non visqueux, pas de diffusion thermique)
En notant ρ la densité, $U = (u_1, u_2, u_3)$ le vecteur vitesse, T la température et $E = T + \frac{|U|^2}{2}$ l'énergie totale, on a :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla . F(W) = 0,$$

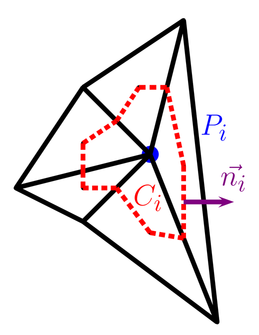
où $W = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho E)$ est le vecteur des variables conservatives et F représente l'opérateur advectif.

– **Schéma numérique :**

1. Maillage $\mathcal{H}_n$ et Solution S^n
2. Calcul de $\tilde{S}^{n+1}$ par le **solveur Euler**
Si on adapte le maillage (sinon $S^{n+1} := \tilde{S}^{n+1}$) :
3. **Génération de maillage** $\mathcal{H}_{n+1}$
4. **Interpolation de la solution** $\tilde{S}^{n+1}$ sur le maillage $\mathcal{H}_{n+1}$ pour obtenir S^{n+1}.

– **Solveur Euler :**

Cellules de volume fini centrées aux points



$$|C_i|\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}t} + \sum_{j \neq i} \Phi(W_{ij}, W_{ji}, \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \vec{n}_i \mathrm{d}\gamma) = 0$$

$$W_{ij} = W_i + 0.5(\nabla W)_{ij} \cdot \overrightarrow{P_iP_j}$$

où $(\nabla W)_{ij}$ est une approximation du gradient obtenue par une combinaison de gradients centrés et décentrés, limité par une généralisation du limiteur superbee.
Calcul du flux Φ : solveur de Riemann HLLC.
Discrétisation en temps : schéma de Runge-Kutta.

– **Génération de maillage :**

A partir de la solution $\tilde{S}^{n+1}$, un nouveau maillage $\mathcal{H}_{n+1}$ est crée en se basant sur un estimateur d'erreur utilisant le Hessien de la solution.
Le maillage $\mathcal{H}_n$ n'est pas forcément bien adapté à la solution $\tilde{S}^{n+1}$.
On a recours ici à des adaptations fréquentes.
Une alternative est d'adapter le maillage sur un intervalle de temps.

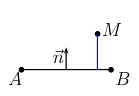
– **Interpolation de la solution :**

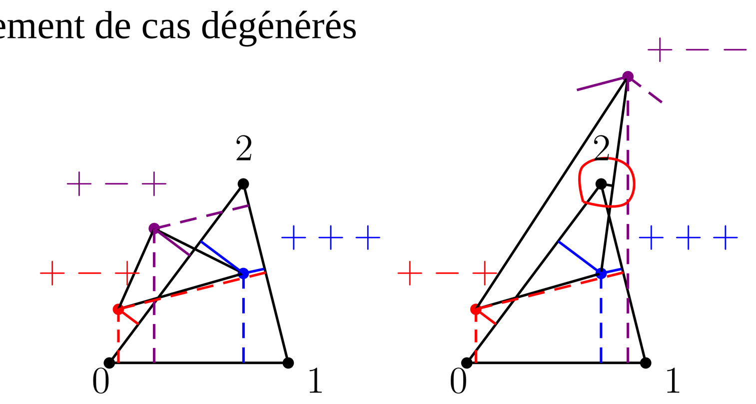
Une fois un nouveau maillage généré, nécessité de projeter la solution de l'ancien maillage $\mathcal{H}_n$ sur le nouveau $\mathcal{H}_{n+1}$.
$\Rightarrow$ Recherche d'une interpolation conservative entre deux maillages triangulaires

Intersection de maillages

– **Intersection de deux triangles :**

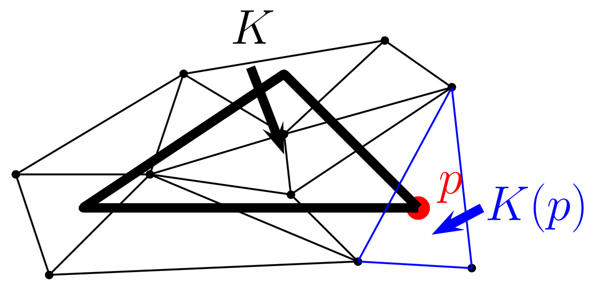
Puissance point/droite
Etude de configurations
Traitement de cas dégénérés





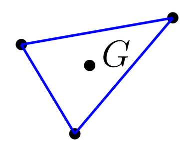
– **Localisation :**

• Boucle sur les sommets p de $\mathcal{H}_{n+1}$
$\rightarrow$ Détermination d'un triangle $K(p)$ de $\mathcal{H}_n$
• Boucle sur les triangles $\mathbf{K}$ de $\mathcal{H}_{n+1}$
$\rightarrow$ Création d'une pile de triangles à traiter initialisée à $K(p)$, avec p sommet de $\mathbf{K}$
$\rightarrow$ Traitement de l'intersection de $\mathbf{K}$ avec le triangle courant de la pile
$\rightarrow$ Rajout d'éléments voisins intersectant dans la pile
$\rightarrow$ Vérification de recouvrement par le calcul de l'aire.



Reconstruction $P1$ conservative

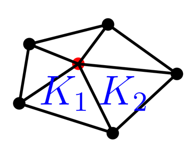
• On suppose f interpolation $P1$ sur maillage $\mathcal{H}_n$
• Calcul de $\int f$ et $\int \nabla f$ pour chaque intersection
$\rightarrow \int f$ et $\int \nabla f$ connu sur chaque triangle de $\mathcal{H}_{n+1}$
• Reconstruction discontinue sur chaque triangle K de $\mathcal{H}_{n+1}$



$$f_K(G) = \frac{\int_K f}{|K|}, \quad \nabla f_K = \frac{\int_K \nabla f_K}{|K|},$$

$$f_K(M) = f_K(G) + \nabla f_K \cdot (M - G)$$

• Redistribution aux points : moyennisation



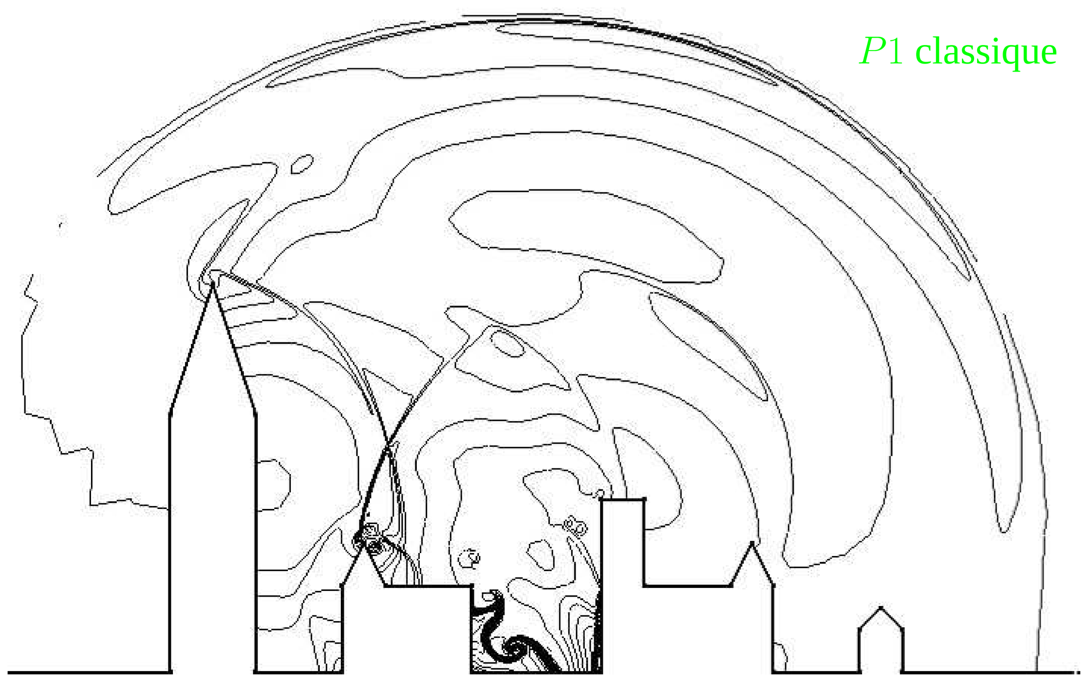
$$f(A) = \frac{\sum_i |K_i| f_{K_i}(A)}{\sum_i |K_i|}$$

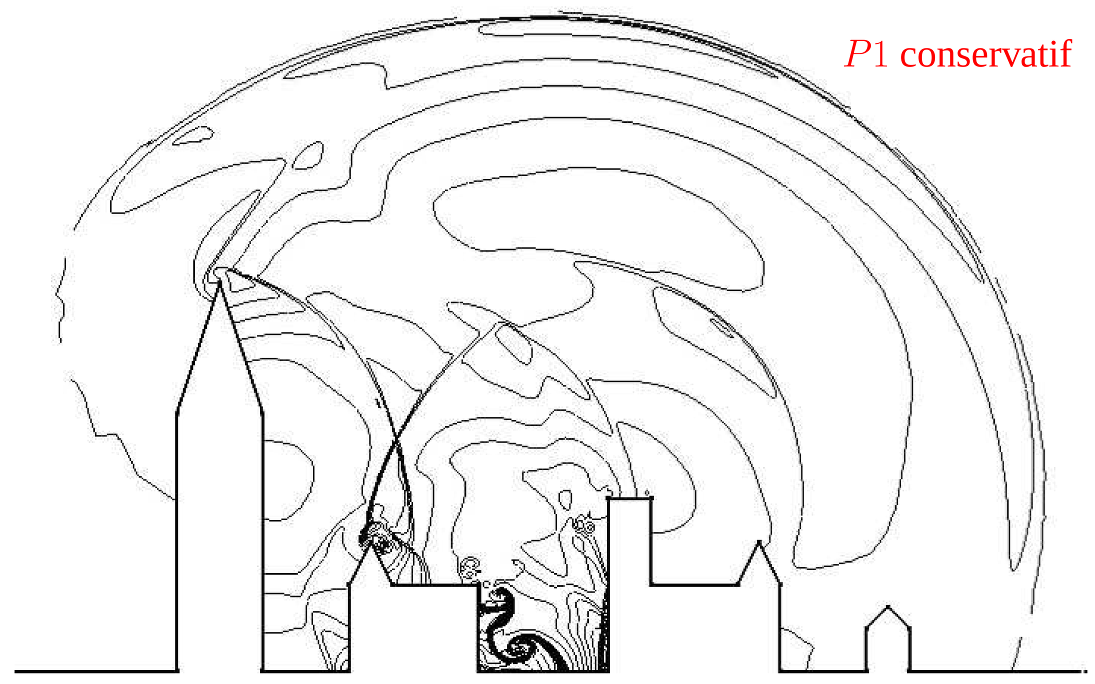
• Correction pour vérifier le principe du maximum : avant moyennisation, en utilisant

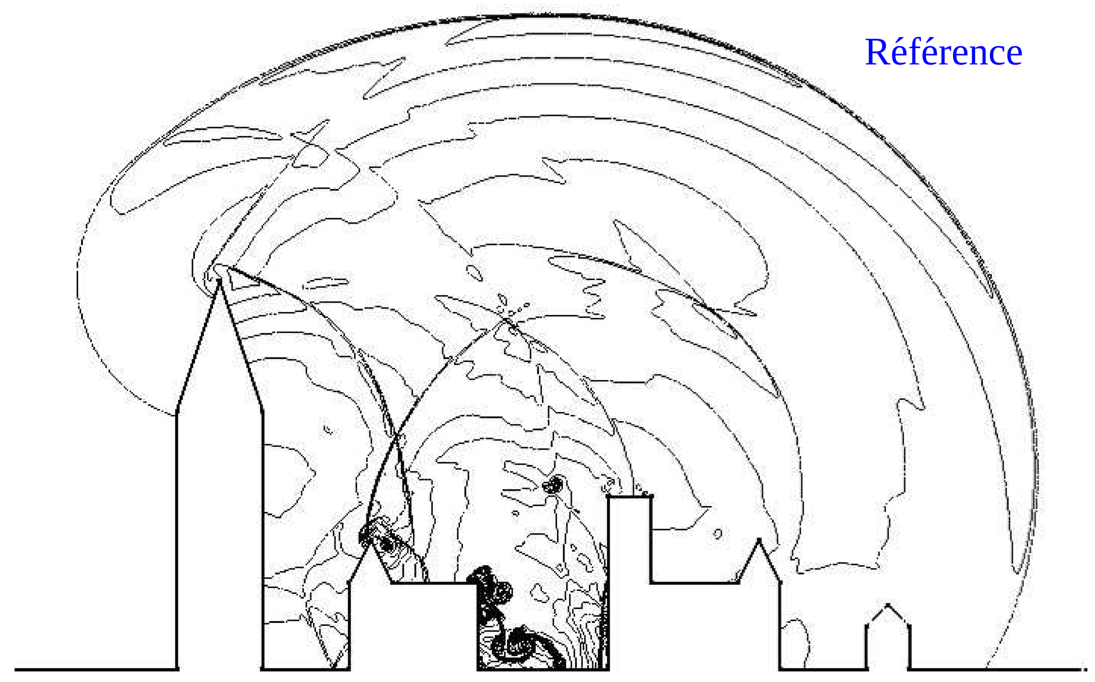
$$\min_{p \in \mathcal{H}_n} f(p) \leq f_K(G) \leq \max_{p \in \mathcal{H}_n} f(p)$$

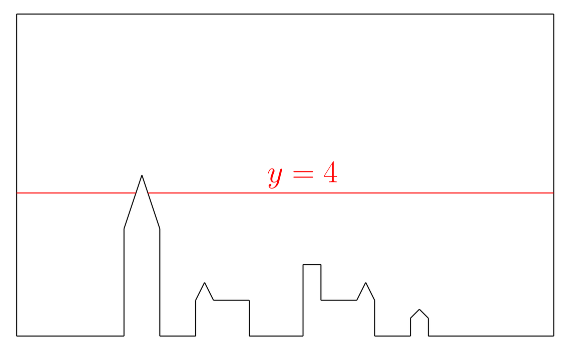
Résultats

Simulation d'une explosion dans une ville

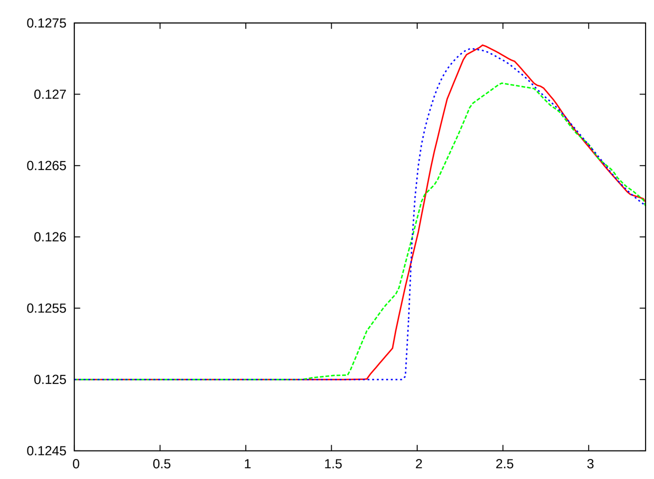




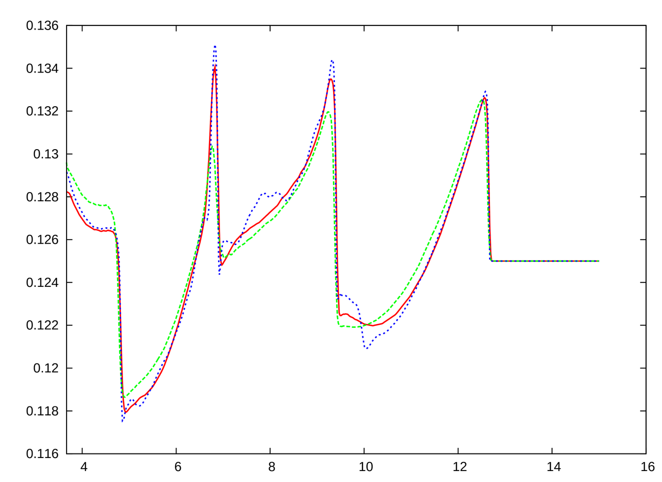




Valeur de la densité sur la droite d'équation $y = 4$
A gauche du clocher



A droite du clocher



$P1$ classique $P1$ conservatif Référence

Références

[1] Frédéric Alauzet, *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*, Thèse Université de Montpellier II, 2003.

[2] L.G. Margolin, M. Shashkov, *Second-Order Sign-Preserving conservative interpolation (remapping) on general grids*, J. Comp. Phys., 184 (2003), 266–298.

Isovaleurs et maillage pour l'interpolation $P1$ classique (10315 noeuds) - pour l'interpolation $P1$ conservative (14630 noeuds) - Isovaleurs de la solution de référence (1345824 noeuds)