

Cyrille MARTIG, cyrille\_martig@yahoo.fr  
Enseignant-doctorant aux écoles de Saint-Cyr Coëtquidan

**Définitions et notations:**

Soit S une série formelle en variables non commutatives sur un alphabet  $Z=\{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ , à coefficients dans un corps K. On note 1 le mot vide et  $S=(S|1)1+\dots+(S|w)w+\dots$  avec  $w \in Z^*$ .

La série S est dite **reconnaisable** s'il existe un entier  $n \geq 1$ , un morphisme de monoïdes  $\mu : Z^* \rightarrow K^{n \times n}$  et deux matrices  $\lambda \in K^{1 \times n}$  et  $\gamma \in K^{n \times 1}$  telles que pour tout mot  $w \in Z^*$ ,  $(S|w)=\lambda \mu(w) \gamma$  et dans ce cas le triplet  $(\lambda, \mu, \gamma)$  est appelé une **représentation** de S et sa dimension est n.

La **matrice de Hankel** d'une série formelle S est la matrice H de dimension  $Z^* \times Z^*$  telle que  $H(u,v)=(S|uv)$ .

**Théorème:** (Schützenberger, Fliess)

Deux représentations réduites d'une même série formelle sont semblables.

**Théorème:** (Carlyle, Paz, Fliess)

Soit S une série formelle. S est reconnaissable si et seulement si sa matrice de Hankel est de rang fini et dans ce cas le rang est égal à la dimension minimum des représentations de S.

**Théorème:** (Représentation réduite de Jacob voir [1])

Soit S une série reconnaissable de rang N. On note  $C_u$  la colonne de la matrice de Hankel indiquée par le mot u et  $C_u(v)$  le nombre de la colonne  $C_u$  situé à la ligne indiquée par le mot v.

Soit  $(C_{d1}, C_{d2}, \dots, C_{dN})$  une base de l'espace vectoriel E engendré par les vecteurs colonnes de la matrice de Hankel  $(d_1, \dots, d_N \in Z^*)$ . Pour tout  $v \in Z^*$ ,  $C_v = C_{d1}m_1(v) + \dots + C_{dN}m_N(v)$  et les  $m_i(v) \in K$  sont déterminés de manière unique. On pose  $\lambda_i = (C_{d1}(1), \dots, C_{dN}(1))$ ,  $(\mu_i(v))_{ij} = m_j(v d_i)$  et  $\gamma_i = (1, 0, \dots, 0)$ . Alors  $(\lambda_i, \mu_i, \gamma_i)$  est une représentation réduite de S.

**Corollaire:** (Représentation duale réduite voir [2])

Soit S une série reconnaissable de rang N. On note  $L_u$  la ligne de la matrice de Hankel indiquée par le mot u et  $L_u(v)$  le nombre de la colonne  $L_u$  situé à la ligne indiquée par le mot v.

Soit  $(L_{d1}, L_{d2}, \dots, L_{dN})$  une base de l'espace vectoriel E' engendré par les vecteurs lignes de la matrice de Hankel  $(d_1, \dots, d_N \in Z^*)$ . Pour tout  $v \in Z^*$ ,  $L_v = L_{d1}m_1(v) + \dots + L_{dN}m_N(v)$  et les  $m_i(v) \in K$  sont déterminés de manière unique. On pose  $\lambda' = (L_{d1}(1), \dots, L_{dN}(1))$ ,  $(\mu'(v))_{ij} = m_j(d_i v)$  et  $\gamma' = (1, 0, \dots, 0)$  et on définit  $\lambda_2 = \lambda' \gamma'$ ,  $\mu_2 = \mu'$  et  $\gamma_2 = \gamma'$ . Alors  $(\lambda_2, \mu_2, \gamma_2)$  est une représentation réduite de S.

**Proposition:** (voir [2])

Soit S une série reconnaissable de rang N,  $(\lambda_1, \mu_1, \gamma_1)$  (resp.  $(\lambda_2, \mu_2, \gamma_2)$ ) la représentation réduite (resp. duale réduite). Soit  $(C_1, C_{u2}, \dots, C_{uN})$  (resp.  $(L_1, L_{v2}, \dots, L_{vN})$ ) la base associée à la représentation réduite (resp. duale réduite) de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (resp. les lignes) de la matrice de Hankel de S. On note  $(P)_{ij} = (S|v_i u_j)$ . Alors  $\mu_1 = P^{-1} \mu_2 P$ .

**Série « miroir »:**

- Soit  $w = z_{i1} \dots z_{ik}$  avec  $z_{ij} \in Z$ . On appelle « miroir » de w le mot  $M(w) = z_{ik} \dots z_{i1}$ .
- Soit  $S = (S|1)1 + \dots + (S|w)w + \dots$  une série formelle, on appelle « miroir » de S la série formelle  $M(S) = (S|1)1 + \dots + (S|w)M(w) + \dots$

**Proposition:** (voir [2])

Soit S une série rationnelle,  $(\lambda, \mu, \gamma)$  la représentation réduite de Jacob associée à M(S). Alors  $(\lambda_3, \mu_3, \gamma_3) = (\gamma, \mu, \lambda)$  est une représentation réduite de S.

**Proposition:** (voir [2])

Soit S une série rationnelle,  $(\lambda, \mu, \gamma)$  la représentation duale réduite associée à M(S). Alors  $(\lambda_4, \mu_4, \gamma_4) = (\gamma, \mu, \lambda)$  est une représentation réduite de S.

**Proposition:** (voir [2])

Soit S une série rationnelle, la représentation duale réduite  $(\lambda_2, \mu_2, \gamma_2)$  et la représentation « miroir »  $(\lambda_3, \mu_3, \gamma_3)$  de S sont égales.

**Proposition:** (voir [2])

Soit S une série rationnelle, la représentation réduite de G. Jacob  $(\lambda_1, \mu_1, \gamma_1)$  et la représentation « miroir »  $(\lambda_4, \mu_4, \gamma_4)$  de S sont égales.

**Système dynamique analytique affine:**

Un système dynamique analytique affine est un système de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g_0(q(t)) + \sum_{j=1}^m u_j(t) g_j(q(t)) \\ y(t) = h(q(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

Avec

- $q \in Q$ , n-variété réelle analytique.
  - $u_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto u_j(t)$
  - $g_0, \dots, g_m$  des champs de vecteurs définis dans un voisinage de  $q(0)$ .
  - $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction analytique définie dans un voisinage de  $q(0)$ .
  - La fonction  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto h(q(t))$  désigne la sortie du système.
- Soient  $A_0, \dots, A_m$  les champs de vecteurs définis par

$$A_j = \sum_{i=1}^n g_i^j(q) \frac{\partial}{\partial q_i}$$

**Théorème:** (voir [3])

La sortie  $y(t)$  du système dynamique analytique affine admet le développement en série suivant, qui converge pour t et  $\max_j |u_j(t_0)|$  (avec  $0 \leq t_0 \leq t$ ) suffisamment petits,

$$y(t) = h(q_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^m A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_i} h(q_0) \int_0^t d\xi_{j_1} d\xi_{j_2} \dots d\xi_{j_i}$$

$$\text{avec } \int_0^t d\xi_{j_1} d\xi_{j_2} \dots d\xi_{j_i} = \int_0^t \int_0^{\xi_1} d\xi_{j_2} \dots d\xi_{j_i} d\xi_{j_1} \text{ si } j_1 \dots j_i = 0$$

$$\int_0^t \int_0^{\xi_1} d\xi_{j_2} \dots d\xi_{j_i} d\xi_{j_1} \text{ si } j_1 \dots j_i \neq 0$$

$$\text{et } \int_0^t d\xi_0 = \int_0^t d\tau = t \quad \text{et} \quad \int_0^t d\xi_j = \int_0^t u_j(\tau) d\tau$$

**Théorème:** (voir [1])

Soit S une série reconnaissable,  $(\lambda, \mu, \gamma)$  une représentation de S. Alors S est la série génératrice du système régulier (ou bilinéaire)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[ \mu(z_0) + \sum_{i=1}^p u_i(t) \mu(z_i) \right] x(t) \\ y(t) = \lambda x(t) \\ x(0) = \gamma \end{cases}$$

$x(t)$  étant le vecteur d'état et  $(u_i(t))$  les entrées du système.

**Exemple:** Soit  $S = z_0 + 2z_1 + z_0 z_0 + 2z_1 z_0 + z_0 z_0 z_0 + z_0 z_1 z_0 + 2z_0 z_1 z_0 + 2z_1 z_0 z_0 + 2z_1 z_1 z_0 + 4z_1 z_1 z_0 + \dots$ , alors on a  $M(S) = z_0 + 2z_1 + z_0 z_0 + 2z_0 z_1 + z_0 z_0 z_0 + 2z_0 z_0 z_1 + z_0 z_1 z_0 + 2z_0 z_1 z_1 + 2z_1 z_1 z_0 + 4z_1 z_1 z_1 + \dots$

**Calcul des représentations de S**

1	$z_0$	$z_1$	$z_0 z_0$	$z_0 z_1$	$z_1 z_0$	$z_1 z_1$
1	0	1	2	1	0	2
$z_0$	1	1	0	1	0	1
$z_1$	2	2	0	2	0	2
$z_0 z_0$	1	1	0	L	L	L
$z_0 z_1$	0	1	2	L	L	L
$z_1 z_0$	2	2	0	L	L	L
$z_1 z_1$	0	2	4	L	L	L

$$\begin{cases} z_0 C_1 = C_{z_0} \\ z_0 C_{z_0} = C_{z_0 z_0} = C_{z_0} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 C_1 = C_{z_1} = -2C_1 + 2C_{z_0} \\ z_1 C_{z_0} = C_{z_1 z_0} = -C_1 + 2C_{z_0} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = (0, 1) \quad \mu_1(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_1(z_1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_0 L_1 = L_{z_0} \\ z_0 L_{z_0} = L_{z_0 z_0} = L_{z_0} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 L_1 = L_{z_1} = 2L_{z_0} \\ z_1 L_{z_0} = L_{z_1 z_0} = L_1 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = (1, 0) \quad \mu_2(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 P \\ \mu_1 = P^{-1} \mu_2 P \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_1 = P^{-1} \gamma_2 \end{cases}$$

**Calcul des représentations de M(S)**

1	$z_0$	$z_1$	$z_0 z_0$	$z_0 z_1$	$z_1 z_0$	$z_1 z_1$
1	0	1	2	1	2	0
$z_0$	1	1	2	1	2	1
$z_1$	2	0	0	0	2	4
$z_0 z_0$	1	1	2	L	L	L
$z_0 z_1$	2	1	2	L	L	L
$z_1 z_0$	0	0	0	L	L	L
$z_1 z_1$	0	2	4	L	L	L

$$\begin{cases} z_0 C_1 = C_{z_0} \\ z_0 C_{z_0} = C_{z_0 z_0} = C_{z_0} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 C_1 = C_{z_1} = 2C_{z_0} \\ z_1 C_{z_0} = C_{z_1 z_0} = C_1 \end{cases}$$

$$\lambda_1' = (0, 1) \quad \mu_1'(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_1'(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_0 L_1 = L_{z_0} \\ z_0 L_{z_0} = L_{z_0 z_0} = L_{z_0} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 L_1 = L_{z_1} = -2L_1 + 2L_{z_0} \\ z_1 L_{z_0} = L_{z_1 z_0} = -L_1 + 2L_{z_0} \end{cases}$$

$$\lambda_2' = (1, 0) \quad \mu_2'(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2'(z_1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Références**

- [1] G. JACOB,  
« Réalisation des systèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries génératrices non commutatives », publication du laboratoire de calcul de l'université de Lille I, octobre 1980.
- [3] M. FLIESS,  
« Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives », Bull. Soc. Math. France, 109, pp3-40, 1981.

- [2] C. MARTIG, C. HESPEL,  
« Représentations réduites d'une série rationnelle en variables non commutatives sur un corps K », Prépublication du laboratoire de mathématiques de Saint-Cyr Coëtquidan, octobre 2005.