Centre de recherche des Ecoles de Saint-Cyr Coëtquidan

INSA de Rennes

Représentations réduites d'une série rationnelle en variables non commutatives sur un corps K

Cyrille MARTIG, cyrille_martig@yahoo.fr
Enseignant-doctorant aux écoles de Saint-Cyr Coëtquidan

Définitions et notations:

Soit S une série formelle en variables non commutatives sur un alphabet $Z=\{z_0,z_1,\ldots,z_p\}$, à coefficients dans un corps K. On note 1 le mot vide et $S=(S|1)1+\ldots+(S|w)w+\ldots$ avec $w \in Z^*$.

La série S est dite **reconnaissable** s'il existe un entier $n\geq 1$, un morphisme de monoïdes $\mu : Z^* \rightarrow K^{n\times n}$ et deux matrices $\lambda \in K^{1\times n}$ et $\gamma \in K^{n\times 1}$ telles que pour tout mot $w \in Z^*$, $(S|w)=\lambda\mu(w)\gamma$ et dans ce cas le triplet (λ,μ,γ) est appelé une **représentation** de S et sa dimension est n.

La **matrice de Hankel** d'une série formelle S est la matrice H de dimension $Z^* \times Z^*$ telle que $H(u,v)=(S|uv)$.

Théorème: (Schützenberger, Fliess)
Deux représentations réduites d'une même série formelle sont semblables.

Théorème: (Carlyle, Paz, Fliess)
Soit S une série formelle. S est reconnaissable si et seulement si sa matrice de Hankel est de rang fini et dans ce cas le rang est égal à la dimension minimum des représentations de S.

Théorème: (Représentation réduite de Jacob voir [1])
Soit S une série reconnaissable de rang N. On note C_u la colonne de la matrice de Hankel indicée par le mot u et $C_u(v)$ le nombre de la colonne C_u situé à la ligne indicée par le mot v.
Soit $(C_{d1}, C_{d2}, \ldots, C_{dN})$ une base de l'espace vectoriel E engendré par les vecteurs colonnes de la matrice de Hankel $(d_1, \ldots, d_N \in Z^*)$. Pour tout $v \in Z^*$,
$C_v= C_{d1}m_1(v)+\ldots+ C_{dN}m_N(v)$ et les $m_i(v) \in K$ sont déterminés de manière unique. On pose
$\lambda_1=(C_{d1}(1), \ldots, C_{dN}(1))$, $(\mu_1(v))_{i,j}=m_i(vd_j)$ et $\gamma_1={}^t(1,0,\ldots,0)$
Alors $(\lambda_1,\mu_1,\gamma_1)$ est une représentation réduite de S.

Corollaire: (Représentation duale réduite voir [2])
Soit S une série reconnaissable de rang N. On note L_u la ligne de la matrice de Hankel indicée par le mot u et $L_u(v)$ le nombre de la colonne L_u situé à la ligne indicée par le mot v.
Soit $(L_{d1}, L_{d2}, \ldots, L_{dN})$ une base de l'espace vectoriel E' engendré par les vecteurs lignes de la matrice de Hankel $(d_1, \ldots, d_N \in Z^*)$. Pour tout $v \in Z^*$,
$L_v= L_{d1}m_1(v)+\ldots+ L_{dN}m_N(v)$ et les $m_i(v) \in K$ sont déterminés de manière unique. On pose
$\lambda'=(L_{d1}(1), \ldots, L_{dN}(1))$, $(\mu'(v))_{i,j}=m_i(d_jv)$ et $\gamma={}^t(1,0,\ldots,0)$
et on définit $\lambda_2={}^t\gamma'$, $\mu_2={}^t\mu'$ et $\gamma_2={}^t\lambda'$. Alors $(\lambda_2,\mu_2,\gamma_2)$ est une représentation réduite de S.

Proposition: (voir [2])
Soit S une série reconnaissable de rang N, $(\lambda_1,\mu_1,\gamma_1)$ (resp. $(\lambda_2,\mu_2,\gamma_2)$) la représentation réduite (resp. duale réduite). Soit $(C_1, C_{u2}, \ldots, C_{uN})$ (resp. $(L_1, L_{v2}, \ldots, L_{vN})$) la base associée à la représentation réduite (resp. duale réduite) de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (resp. les lignes) de la matrice de Hankel de S. On note $(P)_{i,j}=(S|v_iu_j)$. Alors $\mu_1=P^{-1}\mu_2P$.

Série « miroir »:

- Soit $w=z_{i1} \ldots z_{ik}$ avec $z_{ij} \in Z$. On appelle « miroir » de w le mot $M(w)= z_{ik} \ldots z_{i1}$.
- Soit $S=(S|1)1+\ldots+(S|w)w+\ldots$ une série formelle, on appelle « miroir » de S la série formelle $M(S)=(S|1)1+\ldots+(S|w)M(w)+\ldots$.

Proposition: (voir [2])
Soit S une série rationnelle, (λ,μ,γ) la représentation réduite de Jacob associée à M(S).
Alors $(\lambda_3,\mu_3,\gamma_3) =({}^t\gamma,{}^t\mu,{}^t\lambda)$ est une représentation réduite de S.

Proposition: (voir [2])
Soit S une série rationnelle, (λ,μ,γ) la représentation duale réduite associée à M(S).
Alors $(\lambda_4,\mu_4,\gamma_4) =({}^t\gamma,{}^t\mu,{}^t\lambda)$ est une représentation réduite de S.

Proposition: (voir [2])
Soit S une série rationnelle, la représentation duale réduite $(\lambda_2,\mu_2,\gamma_2)$ et la représentation « miroir » $(\lambda_3,\mu_3,\gamma_3)$ de S sont égales.

Proposition: (voir [2])
Soit S une série rationnelle, la représentation réduite de G. Jacob $(\lambda_1,\mu_1,\gamma_1)$ et la représentation « miroir » $(\lambda_4,\mu_4,\gamma_4)$ de S sont égales.

Système dynamique analytique affine:

Un système dynamique analytique affine est un système de la forme:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = g_0(q(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)g_i(q(t)) \\ y(t) = h(q(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

Avec
- $q \in Q$, n-variété réelle analytique.
- $u_i : IR \rightarrow IR$, $t\rightarrow u_i(t)$
- $g_0, \ldots, g_m$ des champs de vecteurs définis dans un voisinage de q(0).
- h: $Q \rightarrow IR$ est une fonction analytique définie dans un voisinage de q(0).
- La fonction y: $IR \rightarrow IR$, $t \rightarrow h(q(t))$ désigne la sortie du système.

Soient $A_0, \ldots, A_m$ les champs de vecteurs définis par

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} g_i^j(q)\frac{\partial}{\partial q_j}$$

Théorème: (voir [3])
La sortie y(t) du système dynamique analytique affine admet le développement en série suivant, qui converge pour t et max| u_j (t_0)| (avec $0 \leq t_0 \leq t$) suffisamment petits,

$$y(t) = h(q_0) + \sum_{v\geq 0}\sum_{j_0,\ldots,j_v=0}^{m} A_{j0}A_{j1}\ldots A_{jv}\, h(q_0)\int_0^t d\xi_{jv}d\xi_{jv-1}\ldots d\xi_{j0}$$

avec
$$\int_0^t d\xi_{jv}d\xi_{jv-1}\ldots d\xi_{j0} = \begin{cases} \int_0^t\int_0^\tau d\xi_{jv-1}\ldots d\xi_{j0}d\tau \quad si\ jv = 0 \\ \int_0^t u_{jv}(\tau)\int_0^\tau d\xi_{jv-1}\ldots d\xi_{j0}d\tau \quad si\ jv \neq 0 \end{cases}$$

et
$$\int_0^t d\xi_0 = \int_0^t d\tau = t \quad et \quad \int_0^t d\xi_j = \int_0^t u_j(\tau)d\tau$$

Théorème: (voir [1])
Soit S une série reconnaissable, (λ,μ,γ) une représentation de S. Alors S est la série génératrice du système régulier (ou bilinéaire)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[\mu(z_0) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\mu(z_i)\right]x(t) \\ y(t) = \lambda x(t) \\ x(0) = \gamma \end{cases}$$

x(t) étant le vecteur d'état et $(u_i(t))$ les entrées du système.

Exemple: Soit $S=z_0+2z_1+z_0z_0+2z_1z_0+z_0z_0z_0+z_0z_1z_0+2z_0z_1z_1+2z_1z_0z_0+2z_1z_1z_0+4z_1z_1z_1+\ldots$, alors on a $M(S)= z_0+2z_1+z_0z_0+2z_0z_1+z_0z_0z_0+2z_0z_0z_1+z_0z_1z_0+2z_0z_1z_1+2z_1z_1z_0+4z_1z_1z_1+\ldots$

Calcul des représentations de S

	1	z_0	z_1	z_0z_0	z_0z_1	z_1z_0	z_1z_1
1	0	1	2	1	0	2	0
z_0	1	1	0	1	0	1	2
z_1	2	2	0	2	0	2	4
z_0z_0	1	1	0	L	L	L	L
z_0z_1	0	1	2	L	L	L	L
z_1z_0	2	2	0	L	L	L	L
z_1z_1	0	2	4	L	L	L	L

$$\begin{cases} z_0.C_1 = C_{z0} \\ z_0.C_{z0} = C_{z0z0} = C_{z0} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1.C_1 = C_{z1} = -2C_1 + 2C_{z0} \\ z_1.C_{z0} = C_{z1z0} = -C_1 + 2C_{z0} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = (0,1) \quad \mu_1(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_1(z_1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_0.L_1 = L_{z0} \\ z_0.L_{z0} = L_{z0z0} = L_{z0} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1.L_1 = L_{z1} = 2L_{z0} \\ z_1.L_{z0} = L_{z0z1} = L_1 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = (1,0) \quad \mu_2(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 P \\ \mu_1 = P^{-1}\mu_2 P \quad avec \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_1 = P^{-1}\gamma_2 \end{cases}$$

Calcul des représentations de M(S)

	1	z_0	z_1	z_0z_0	z_0z_1	z_1z_0	z_1z_1
1	0	1	2	1	2	0	0
z_0	1	1	2	1	2	1	2
z_1	2	0	0	0	0	2	4
z_0z_0	1	1	2	L	L	L	L
z_0z_1	2	1	2	L	L	L	L
z_1z_0	0	0	0	L	L	L	L
z_1z_1	0	2	4	L	L	L	L

$$\begin{cases} z_0.C_1 = C_{z0} \\ z_0.C_{z0} = C_{z0z0} = C_{z0} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1.C_1 = C_{z1} = 2C_{z0} \\ z_1.C_{z0} = C_{z1z0} = C_1 \end{cases}$$

$$\lambda_1' = (0,1) \quad \mu_1'(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_1'(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_0.L_1 = L_{z0} \\ z_0.L_{z0} = L_{z0z0} = L_{z0} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1.L_1 = L_{z1} = -2L_1 + 2L_{z0} \\ z_1.L_{z0} = L_{z0z1} = -L_1 + 2L_{z0} \end{cases}$$

$$\lambda_2' = (1,0) \quad \mu_2'(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2'(z_1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Références

[1] G. JACOB,
« Réalisation des systèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries génératrices non commutatives »,
publication du laboratoire de calcul de l'université de Lille I, octobre 1980.

[2] C.MARTIG, C. HESPEL,
« Représentations réduites d'une série rationnelle en variables non commutatives sur un corps K »,
Prépublication du laboratoire de mathématiques de Saint-Cyr Coëtquidan, octobre 2005.

[3] M. FLIESS,
« Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives »,
Bull. Soc. Math. France, 109, pp3-40, 1981.