

I. Metzmeier^a, E. Sonnendrücker^a, O. Hoenen^b, E. Violard^b

^a IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg, ^b ICPS, Université Louis Pasteur, Strasbourg
{isametz,sonnen}@math.u-strasbg.fr, {hoenen,violard}@icps.u-strasbg.fr

1 Introduction

1.1 Motivation

L'équation de Vlasov suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \nabla_v f = 0$$

permet de décrire l'évolution de particules chargées sous l'effet d'un champ électrique où f est la fonction de répartition des particules. Dans notre travail, elle est couplée avec l'équation de Poisson

$$-\Delta \Phi = 1 - \int f dv = \rho \quad \text{et} \quad E = -\nabla \Phi.$$

Nous voulons déterminer f dans l'espace des phases (\vec{x}, \vec{v}) , un espace à 6 dimensions. Pour avoir une méthode efficace, il est donc important d'optimiser le nombre de points du maillage grâce à une **méthode adaptative**; nous avons aussi cherché à obtenir une méthode conservative (pour la masse du système).

1.2 Méthodes utilisées

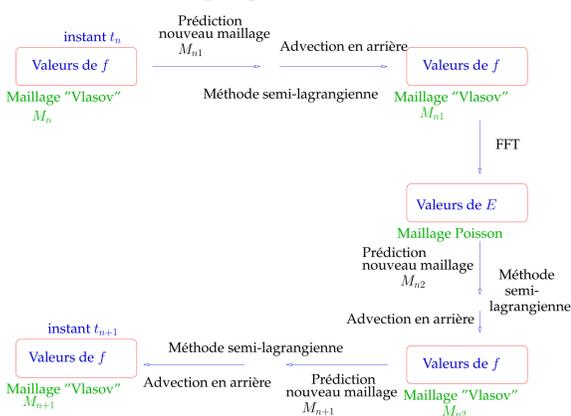
– La **méthode semi-lagrangienne** utilisée consiste à calculer une solution de l'équation de Vlasov en utilisant le fait que la fonction de répartition f est conservée le long des caractéristiques. Nous avons utilisé un splitting en temps pour séparer l'advection en espace de celle en vitesse, ceci permet de simplifier la méthode puisqu'on peut explicitement calculer les caractéristiques dans ce cas-là.

– La **transformée de Fourier discrète rapide** (FFT) est utilisée pour la résolution de l'équation de Poisson. Elle est efficace et facilement adaptable à plusieurs dimensions.

– Nous utilisons un **maillage adaptatif**, qui change à chaque pas de temps, pour suivre la répartition des particules. Cela évite d'avoir un maillage uniforme très fin puisque la fonction de répartition évolue beaucoup en espace et en temps.

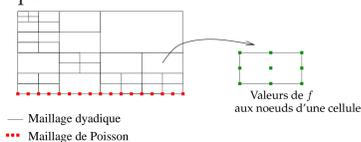
– Le problème étant posé dans un espace des phases à 6 dimensions, le système engendre un grand nombre de calculs. Les calculs à effectuer sur chaque maille étant identiques, le code existant a été **parallélisé**.

1.3 Schéma du programme



1.4 Maillage

Nous travaillons sur un maillage dyadique adaptatif aux noeuds duquel nous calculons les valeurs de f . Dans l'espace \mathbb{Q}_2 , nous avons 3^{2n} valeurs de f aux noeuds de chaque cellule; elles permettent de reconstruire un polynôme de \mathbb{Q}_2 approximant f à n'importe quel endroit de la cellule. Les valeurs du champ électrique E sont calculées aux noeuds du maillage de Poisson qui ne dépend que de la position



2 Détails des méthodes

2.1 Méthode semi-lagrangienne

– Pour tout temps t et s , la fonction de répartition vérifie

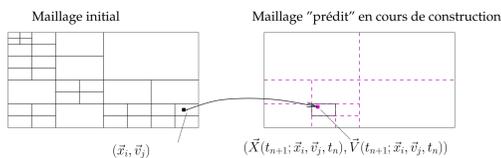
$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f(\vec{X}(s; \vec{x}, \vec{v}, t), \vec{V}(s; \vec{x}, \vec{v}, t), s)$$

$(\vec{X}(s; \vec{x}, \vec{v}, t), \vec{V}(s; \vec{x}, \vec{v}, t))$ sont les caractéristiques solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{ds} = \vec{V} \\ \frac{d\vec{V}}{ds} = \vec{E}(\vec{X}(s), s) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\vec{X}(t) = \vec{x}$ et $\vec{V}(t) = \vec{v}$

– Nous utilisons cette méthode qui ne nécessite pas de raffiner le pas de temps, pour prédire le maillage. Nous projetons "en avant" les cellules du maillage au temps n en suivant les caractéristiques et construisons une cellule de même taille et ses filles sur le nouveau maillage en construction.

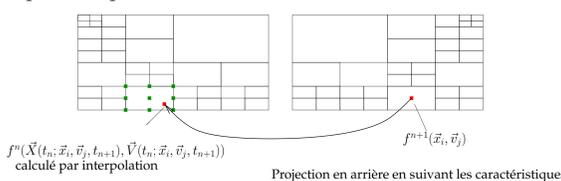


Projection "en avant" d'une maille suivant les caractéristiques

– Une fois le nouveau maillage construit, nous voulons calculer les valeurs de f^{n+1} aux noeuds (\vec{x}_i, \vec{v}_j) ; nous cherchons alors l'origine de la caractéristique qui se finit en (\vec{x}_i, \vec{v}_j) et utilisons le fait que

$$f^{n+1}(\vec{x}_i, \vec{v}_j) = f^n(\vec{X}(t_n; \vec{x}_i, \vec{v}_j, t_{n+1}), \vec{V}(t_n; \vec{x}_i, \vec{v}_j, t_{n+1}))$$

Nous pouvons calculer la valeur de $f^n(\vec{X}(t_n; \vec{x}_i, \vec{v}_j, t_{n+1}))$ par interpolation sur la maille.



Projection en arrière en suivant les caractéristiques

– Une dernière étape est celle de compression qui permet de déraffiner quand c'est possible. On regarde l'erreur entre les valeurs aux noeuds des cellules filles et leur interpolation avec les valeurs aux noeuds de la cellule mère. Si cette erreur est inférieure à un seuil que nous fixons, on supprime les cellules filles.



– Le splitting en temps que nous avons effectué consiste à décomposer les advection en espace et en vitesse pendant 1 pas de temps. Nous avons successivement, une demi advection en espace, une advection en vitesse et une demi advection en espace

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{v}) &\rightarrow (\vec{x} - \vec{v}\Delta t/2, \vec{v}) \\ (\vec{x}, \vec{v}) &\rightarrow (\vec{x}, \vec{v} - \vec{E}\Delta t) \\ (\vec{x}, \vec{v}) &\rightarrow (\vec{x} - \vec{v}\Delta t/2, \vec{v}) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors, à chaque étape, calculer les caractéristiques de manière exacte.

2.2 Parallélisation

La parallélisation du code est réalisée suivant un schéma de distribution qui repose sur la notion de région. C'est une union de mailles du domaine de calcul, l'ensemble des régions formant une partition du maillage. L'algorithme parallèle :

- ordonne les mailles selon une courbe de Hilbert
- découpe le maillage en régions
- distribue les régions sur les processeurs
- met à jour, après la prédiction, les régions quand un déséquilibre est détecté en cours de simulation en migrant les mailles de proche en proche entre les régions voisines

2.3 Conservation de la masse

En dimension 1, $((\vec{x}, \vec{v}) = (x, v_x))$, on connaît f aux 9 noeuds de chaque cellule du maillage de départ M_{old} ; nous associons à chaque cellule une information supplémentaire : sa masse $m = \int_{C_{old}} f dx dv$.

Dans la phase de prédiction, quand on projette le milieu de notre cellule C_{old} , on crée 4 cellules filles sur lesquelles on répartit cette masse venant de C_{old} , soit en la divisant équitablement sur chacune des cellules filles, soit en tenant compte du lieu de projection.

Au moment de la phase du calcul des valeurs aux noeuds d'une cellule C_{new} on ne cherche les valeurs qu'aux noeuds "du bord" et la valeur du noeud central est déterminée de manière à ce que $\int_{C_{new}} f dx dv = m_{C_{new}}$. Il faut alors adapter l'étape de compression.

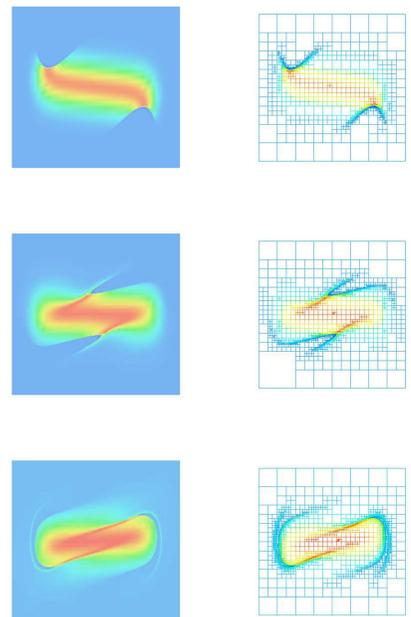
Cette méthode conserve la masse, mais elle ne fonctionne pas. Comme on peut le voir sur le cas test, la masse se concentre au milieu, ce qui n'est pas "physique".



Test du code avec conservation de la masse

3 Résultats numériques

3.1 Evolution d'un faisceau de particules et du maillage associé sous l'effet d'un champ électrique



3.2 Perspectives

Nous tentons actuellement d'utiliser une méthode de Galerkin Discontinu pour résoudre le système Vlasov-Poisson, ce qui permettra d'obtenir une méthode conservative. Le code est toujours basé sur un maillage adaptatif. Le remplissage des matrices du schéma numérique nécessitant un traitement identique sur chaque cellule du maillage, il sera aussi intéressant de paralléliser ce code.