Correction multi-échelle pour des perturbations singulières du bord

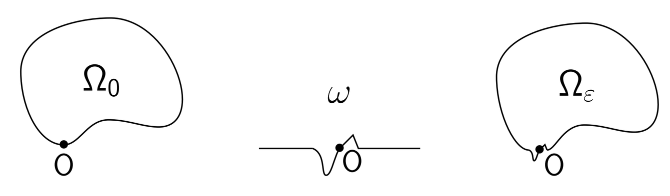
Marc DAMBRINE[1] et **Grégory VIAL**[2]

[1] LMAC - Université de Technologie de Compiègne – [2] IRMAR - Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan

LE CONTEXTE

La présence de micro-défauts modifie les propriétés (mécaniques, acoustiques, electro-magnétiques, etc) d'un matériau. Leur prise en compte nécessite le plus souvent un maillage très fortement raffiné ; on souhaite ici proposer une méthode alternative basée sur une analyse asymptotique. Par ailleurs, on veut préciser l'influence de telles perturbations sur une fonctionnelle (d'énergie).

UN PROBLÈME MODÈLE

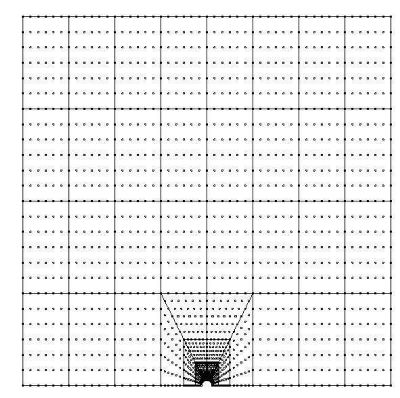


$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ + \text{ Condition aux limites sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

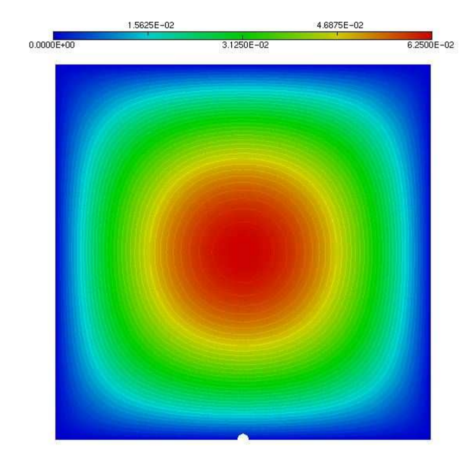
But : Décrire le comportement de u_ε, solution d'un problème de perturbation singulière du bord.

UNE APPROCHE PAR LE CALCUL

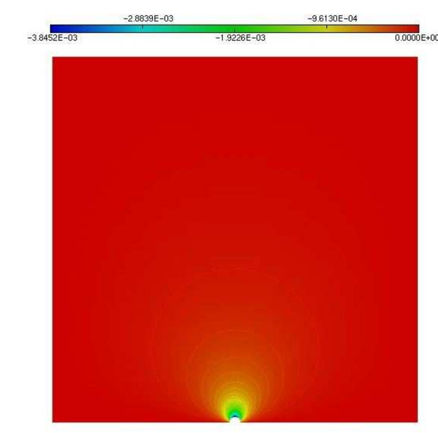
Le maillage ($\mathbb{Q}_8$)



La solution calculée



La différence avec la solution non-perturbée



PRINCIPAUX RÉSULTATS THÉORIQUES

Les enjeux

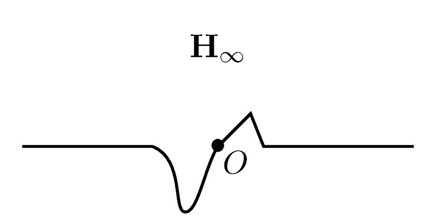
- pour la fonction d'état :
  - *comment influent ces perturbations ?* nous obtenons un développement asymptotique de la solution par rapport au paramètre ε,
  - *peut-on se passer du remaillage ?* En tronquant ce développement au premier ordre, nous superposons le premier correcteur à la solution calculée dans le domaine non perturbé.
- pour des fonctionnelles de formes :
  - la théorie classique de Murat-Simon ne s'applique pas,
  - le gradient topologique non plus,
  - nous obtenons un début de développement de la fonctionnelle par rapport à ε.

Les difficultés

- les deux échelles apparaissant dans le développement,
- le calcul des profils (cf. les singularités apparaissant dans les probl'emes à coins).

Les idées

- s'inspirer des études effectuées dans les domaines à coins et utiliser un développement à deux échelles :
  - la variable lente x qui vit à l'échelle du domaine,
  - la variable rapide $\frac{x}{\varepsilon}$ qui vit à l'échelle de la perturbation.
- il apparaît des correcteurs en variable rapide : ils sont harmoniques dans un domaine infini obtenu par blow-up du domaine perturbé et relèvent le développement de Taylor en O de la solution dans le domaine non perturbé,



- On recolle ces correcteurs (**profils singuliers**) avec la solution dans le domaine non perturbé à l'aide de fonctions de troncature. Ces troncatures engendrent des correcteurs en variable lente pour assurer l'harmonicité.

Le théorème typique

Nous considérons le cas simple des conditions de Dirichlet :

Théorème *On suppose* $f \in \mathcal{C}^\infty$ *à support compact dans* Ω. *Alors la solution* u_ε *de*

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= f \textit{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= 0 \textit{ sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

admet le développement asymptotique pour $N < K$

$$u_\varepsilon(x) = \zeta(\tfrac{x}{\varepsilon})u_0(x) + \chi(x)\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^i V_d^i(\tfrac{x}{\varepsilon}) + \zeta(\tfrac{x}{\varepsilon})\sum_{i=2}^{N} \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1}).$$

Les profils V_d^i *corrigent le* i^{ieme} *terme dans le développement de Taylor de* u_0 *en* O, *et les* w_ε^i *sont les correcteurs de troncature qui vérifient* $\|w_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(1)$.

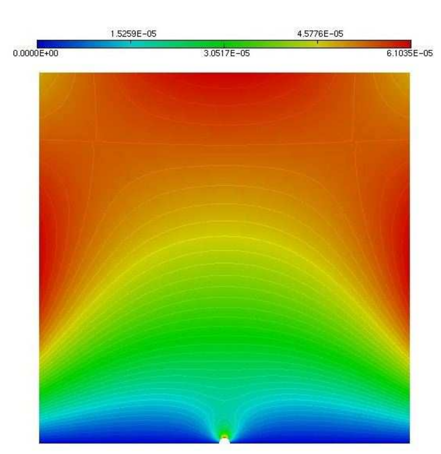
Des résultats similaires sont également obtenus pour les conditions de Neumann et pour le système de l'élasticité.

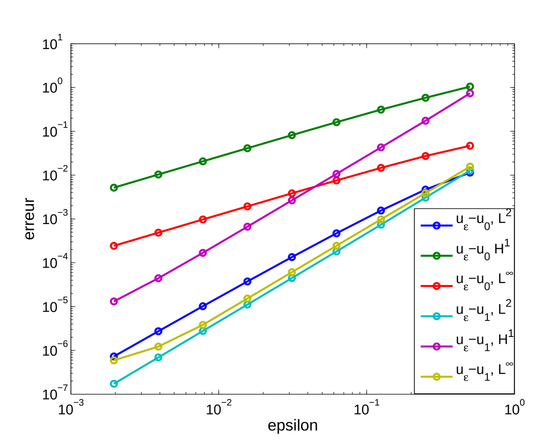
VALIDATION ET INTÉRÊT NUMÉRIQUE

Validation

On rajoute le premier correcteur puis on trace le reste :

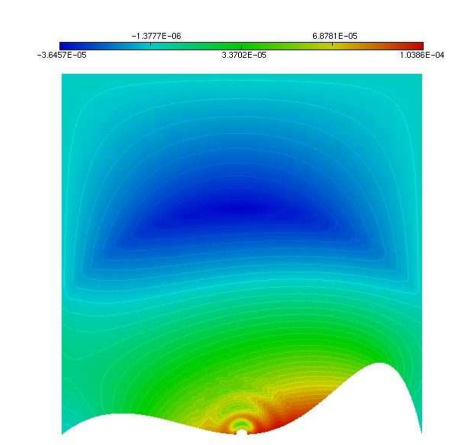
$$u_\varepsilon(x) - \underbrace{(u_0(x) + \varepsilon V(\tfrac{x}{\varepsilon}))}_{u_1(x)}$$

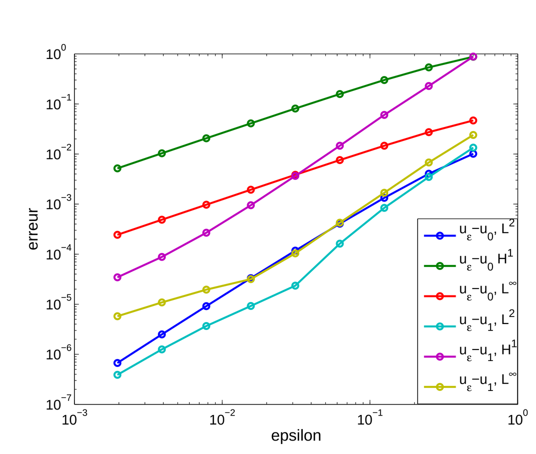




Cas d'un bord courbe

La preuve se complique mais les conclusions restent valides.





EXTENSIONS

- Autres conditions aux limites, autres problèmes elliptiques (élasticité),
- Cas de plusieurs inclusions (réduction sensible du nombre de d.d.l.),
- Cas d'un ajout de matière, traitement complet d'une frontière courbe sans hypothèse de convexité,
- Application effective à l'initiation de fissures,
- Étude de l'interaction entre plusieurs perturbations proches.

Références.

[1] M. Dambrine and G. Vial, *On the influence of a boundary perforation on the Dirichlet energy*, Control and Cybernetics, **34**, 1, pp. 117-136, 2005.

[2] S. Tordeux and G. Vial, *Matching of Asymptotic Expansions and Multiscale Expansion for the Rounded Corner Problem*, SAM Research Report, ETH, Zürich, 2006.

[3] V. Maz'ya, S.A. Nazarov, and B. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Birkhäuser, Berlin, 2000.