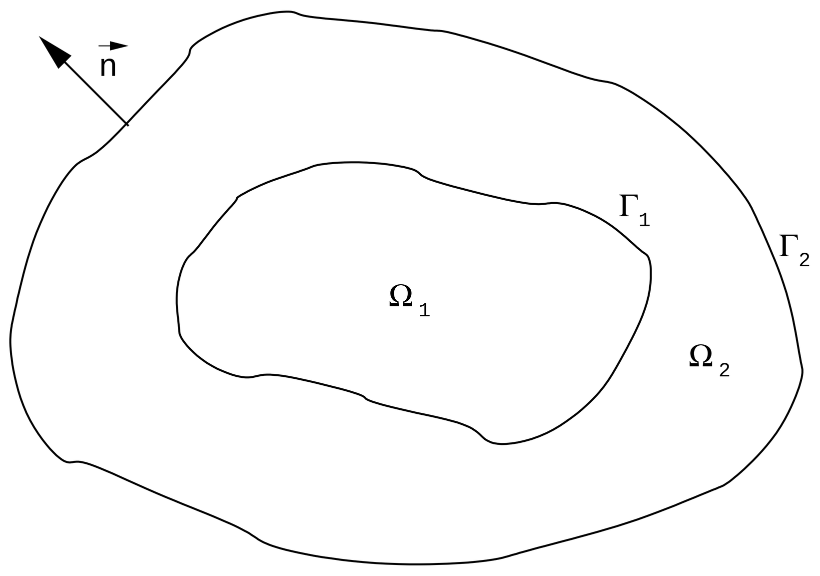
Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Compiègne
BP 20.529, Compiègne Cedex, France
Tél : 33 (0) 3 44 23 47 37 , e-mail:cholland@dma.utc.fr
Céline Hollandts

Problèmes inverses : Application à l'électroencéphalographie

Identifier **la conductivité électrique** σ dans les différentes couches de la tête sachant que :

- géométrie des inclusions connues et **deux** couches imbriquées
- σ **constante** sur chaque couche

Ω domaine borné régulier constitué de deux sous-domaines emboités $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ de frontière Γ_i suffisamment **régulière** pour $i = 1, 2$.



Problème direct de Dirichlet

Soit σ connue et $f \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, chercher le potentiel u tel que :

$$P(\sigma, f)\ \begin{cases} -\text{div}\,(\sigma \text{ grad } u) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = f & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow u$ et $\sigma\dfrac{\partial u}{\partial n}$ déterminés sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

$$P(\sigma, f) \xleftrightarrow{\text{Equations intégrales de frontière}} A(\sigma)\begin{pmatrix} u|_{\Gamma_1} \\ \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} \end{pmatrix} = b(\sigma)$$

$$A(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2} I_1 + (\sigma_1 - \sigma_2)\, D_{11} & -S_{21} \\ (\sigma_1 - \sigma_2)\, D_{12} & -S_{22} \end{pmatrix}, \quad b(\sigma) = \begin{pmatrix} -\sigma_2 D_{21}(f) \\ -\sigma_2(D_{22} + \frac{I_2}{2})(f) \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{S_{il}} : \forall y \in \Gamma_l, h(y) \longrightarrow \displaystyle\int_{\Gamma_i} (h\, G(x, y))\, d\gamma(x)$
- $\mathbf{D_{il}} : \forall y \in \Gamma_l, h(y) \longrightarrow \displaystyle\int_{\Gamma_i} (h \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x})\, d\gamma(x)$

($G(x) = \dfrac{1}{4\pi|x|}$ est la solution élémentaire de l'équation de Laplace.)

Etude du Problème inverse

<u>Théorème</u> : Dans le cas de deux couches et pour une donnée de Dirichlet f nulle sur une partie du bord extérieur, ***une seule*** *mesure d'un couple (f, g) suffit pour IDENTIFIER la conductivité.*

Soit UN couple $(f, g) \in (H^{1/2}(\Gamma_2), H^{-1/2}(\Gamma_2))$ tel que :

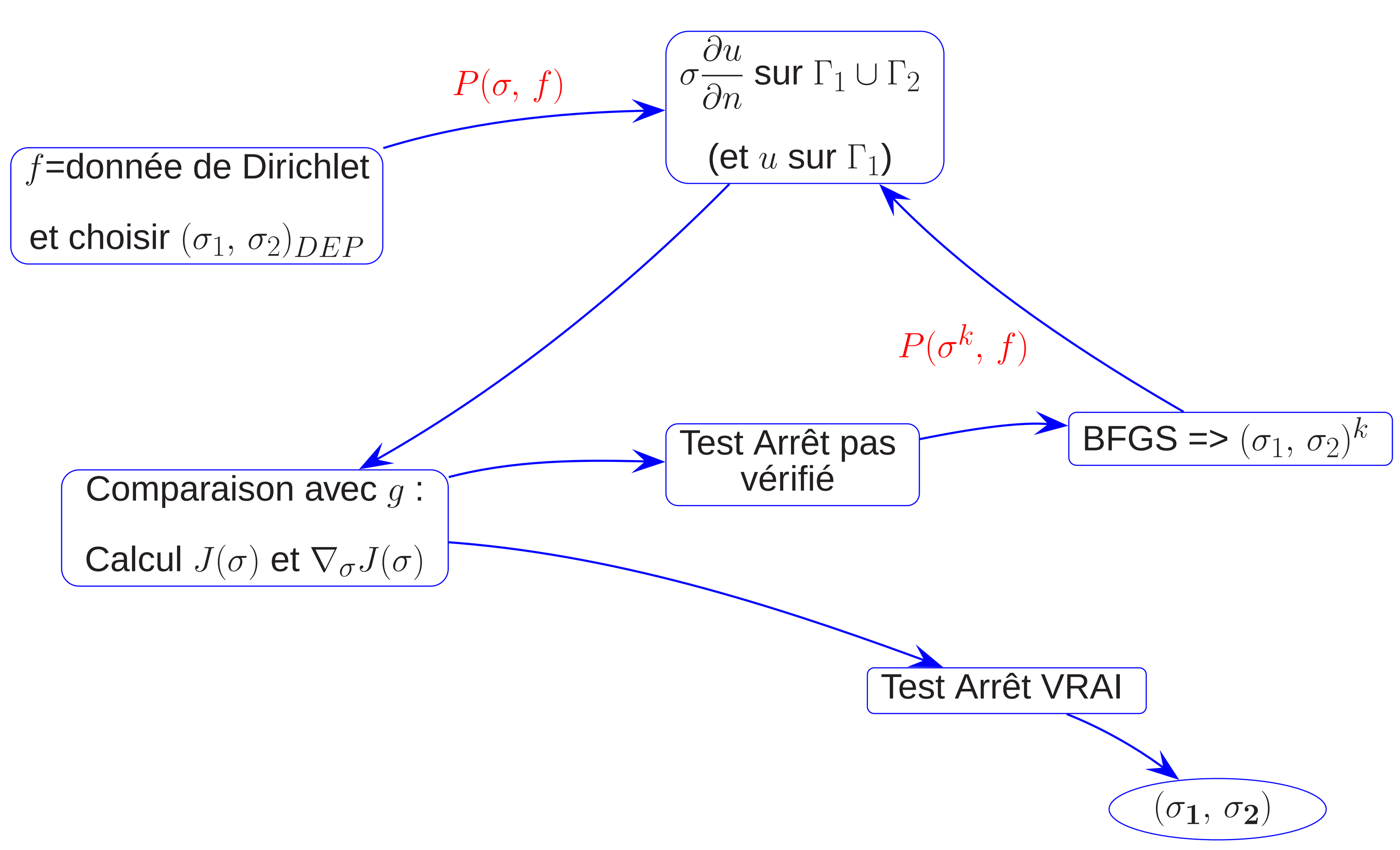
- f donnée de Dirichlet **NULLE** sur $\Gamma^* \subset \Gamma_2$ tel que mes$(\Gamma^*) \neq 0$ et mes$(\Gamma/\Gamma^*) \neq 0$
- g donnée de Neumann associée connue

nous cherchons le σ tel que : u solution de $P(\sigma, f)$ vérifiant $\sigma_2 \dfrac{\partial u}{\partial n} = g$.

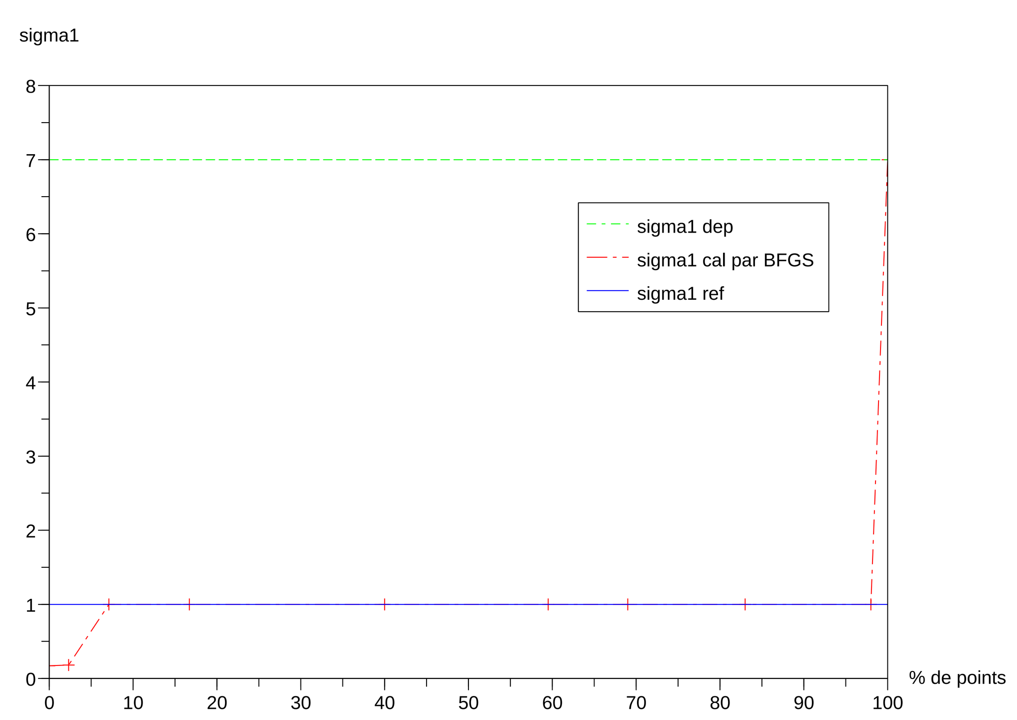
$\Longleftrightarrow$ Minimiser $J : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $J(\sigma) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Gamma_2} |g - \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial n}|^2 d\gamma$

(Condition **nécessaire** de la minimisation : $\nabla_\sigma J(\sigma) = 0$.)

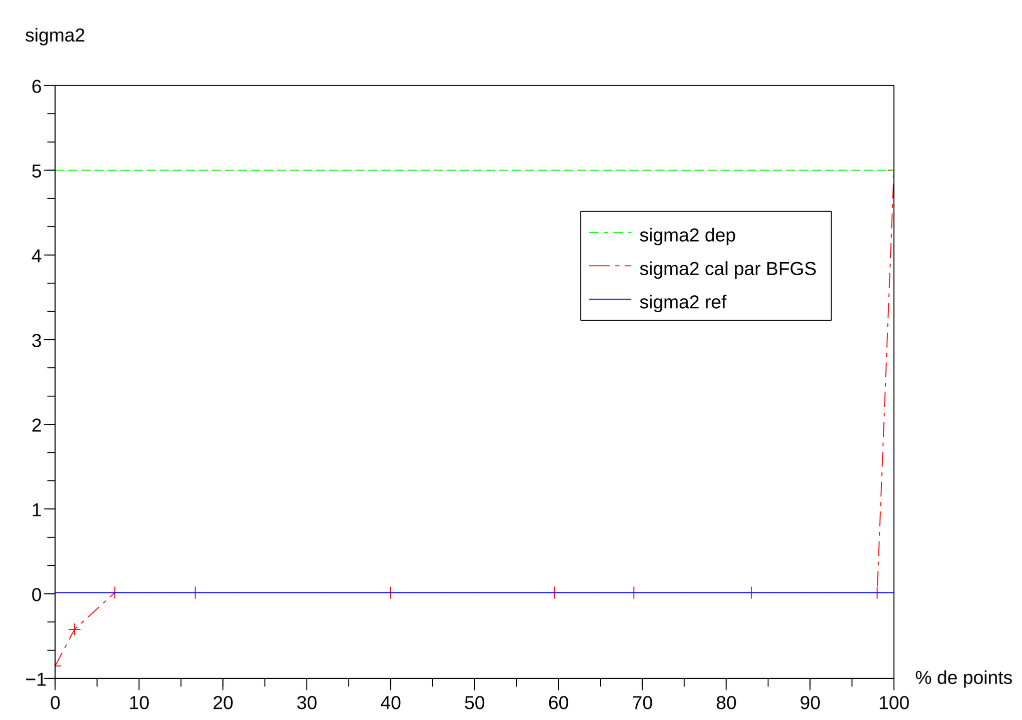
Algorithme



Résultats numériques



σ_1 en fonction du % de points ayant un potentiel nul sur Γ_2



σ_2 en fonction du % de points ayant un potentiel nul sur Γ_2

Perspectives

- Régularisation de la fonctionnelle coût
- Passage aux 3 couches imbriquées (plusieurs mesures de u et $\sigma\frac{\partial u}{\partial n}$)

Collaborations

Abdellatif El Badia, Jean Giroire, Tuong Ha Duong, Vincent Pavan