

Algorithmes de contrôle d'interface libre

Implémentation sur un modèle MHD linéaire

A. Orriols

en collaboration avec T. Lelièvre

CERMICS

École Nationale des Ponts et Chaussées
{orriols,lelievre}@cermics.enpc.fr

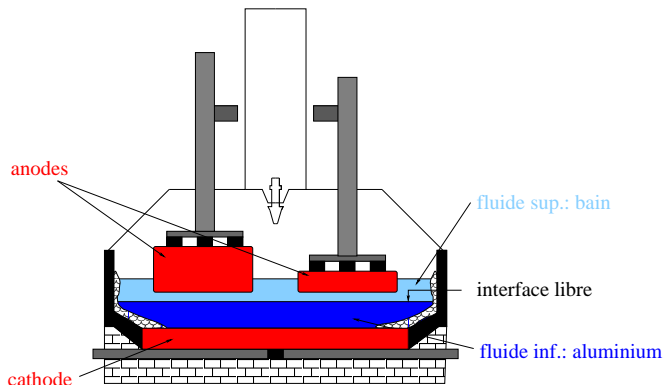
38^e Congrès National d'Analyse Numérique, 2006

Le procédé industriel

Réduction d'un oxyde d'aluminium par électrolyse

950 °C

500 kA



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Modélisation de la production d'aluminium
 - Contrôle optimal
- 2 Cas linéaire
 - Gradients des fonctions coût
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 3 Cas non linéaire
 - Paramétrisation de l'interface
 - Gradient de la fonction coût
- 4 Résumé

Deux modèles étudiés

- MHD non linéaire : continuité, Navier-Stokes et Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \\ \Omega_{i=1,2} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div} \left(\frac{1}{Re_i} \nabla \mathbf{u} \right) = -\rho_i \frac{e_z}{Fr} + S \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \partial_t \mathbf{B} + \operatorname{rot} \left(\frac{1}{Rm_i} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

+ CL et CI

- Approximation shallow-water et linéarisation

$$\Omega_H \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \eta - c^2 (\Delta_H \eta + \partial_y \phi \partial_x B_z - \partial_x \phi \partial_y B_z) = 0 \\ -\Delta_H \phi - S \eta = 0 \end{array} \right.$$

+ CL et CI

Deux modèles étudiés

- MHD non linéaire : continuité, Navier-Stokes et Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \\ \Omega_{i=1,2} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div} \left(\frac{1}{Re_i} \nabla \mathbf{u} \right) = -\rho_i \frac{e_z}{Fr} + S \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \partial_t \mathbf{B} + \operatorname{rot} \left(\frac{1}{Rm_i} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

+ CL et CI

- Approximation shallow-water et linéarisation

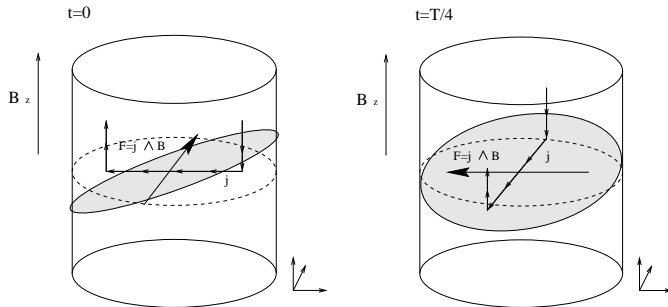
$$\Omega_H \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \eta - c^2 (\Delta_H \eta + \partial_y \phi \partial_x B_z - \partial_x \phi \partial_y B_z) = 0 \\ -\Delta_H \phi - S \eta = 0 \end{array} \right.$$

+ CL et CI

Un résultat commun aux deux modèles

Le cas test du *rolling*

Injection d'un **courant vertical uniforme** en présence d'un **champ magnétique vertical uniforme**



⇒ Roulement de la nappe de métal

Commandes et fonctions coût

Modèle linéaire

- commande $h_c(t)$: stabilisation en temps réel

$$\mathcal{J}_1(h_c) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_{\Omega_H} [\sigma_0 \eta^2 + \sigma_1 (\partial_t \eta)^2](h_c) + \frac{Q_1}{2} \int_0^{t_f} h_c^2.$$

- commande $b_z(x, y)$: amélioration du design des cuves

$$\mathcal{J}_2(b_z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_H} [\sigma_0 \eta^2 + \sigma_1 (\partial_t \eta)^2](b_z) + \frac{Q_2}{2} \int_{\Omega_H} b_z^2.$$

$$(b_z(x, y) = B_z(x, y) - \bar{B}_z)$$

Commandes et fonctions coût

Modèle linéaire

- commande $h_c(t)$: stabilisation en temps réel

$$\mathcal{J}_1(h_c) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_{\Omega_H} [\sigma_0 \eta^2 + \sigma_1 (\partial_t \eta)^2](h_c) + \frac{Q_1}{2} \int_0^{t_f} h_c^2.$$

- commande $b_z(x, y)$: amélioration du design des cuves

$$\mathcal{J}_2(b_z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_H} [\sigma_0 \eta^2 + \sigma_1 (\partial_t \eta)^2](b_z) + \frac{Q_2}{2} \int_{\Omega_H} b_z^2.$$

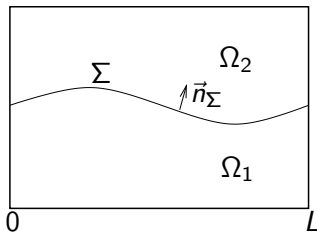
$$(b_z(x, y) = B_z(x, y) - \bar{B}_z)$$

Commandes et fonctions coût

Modèle non linéaire

- force volumique $f(x, y)$: contrôle de la forme de l'interface

$$\mathcal{J}_3(f) = \frac{1}{2} \int_0^L (h - h_0)^2 + \frac{Q}{2} \int_{\Omega} \|f\|^2,$$



$$\Sigma = \{(x, h(x)), x \in [0, L]\}$$
$$\vec{n}_{\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \begin{pmatrix} -h'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$



problème de Stokes bifluide stationnaire

Méthode de gradient - problème adjoint

- Formalisme lagrangien

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \mathcal{J}(y, u) - \langle \lambda, \mathcal{F}(y, u) \rangle$$

(\mathcal{F} : équation d'état, λ : multiplicateur de Lagrange)

- Conditions de stationnarité :

$$\begin{cases} \partial_{\lambda} \mathcal{L} = 0 & \text{équation d'état} \\ \partial_y \mathcal{L} = 0 & \text{problème adjoint} \\ \partial_u \mathcal{L} = 0 & \text{condition d'optimalité} \end{cases}$$

= conditions nécessaires d'optimalité

Méthode de gradient - problème adjoint

- Formalisme lagrangien

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \mathcal{J}(y, u) - \langle \lambda, \mathcal{F}(y, u) \rangle$$

(\mathcal{F} : équation d'état, λ : multiplicateur de Lagrange)

- Conditions de stationnarité :

$$\begin{cases} \partial_{\lambda} \mathcal{L} = 0 & \text{équation d'état} \\ \partial_y \mathcal{L} = 0 & \text{problème adjoint} \\ \partial_u \mathcal{L} = 0 & \text{condition d'optimalité} \end{cases}$$

= conditions nécessaires d'optimalité

Méthode de gradient - problème adjoint

- Conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} \partial_{\lambda} \mathcal{L} = 0 & \text{équation d'état} \\ \partial_y \mathcal{L} = 0 & \text{problème adjoint} \\ \partial_u \mathcal{L} = 0 & \text{condition d'optimalité} \end{cases} \Rightarrow \nabla_u \mathcal{J} = 0$$

= problème direct difficile

- Si y est solution de l'équation d'état et λ du problème adjoint

$$\nabla_u \mathcal{J}(y, u) = \partial_u \mathcal{L}(y, u, \lambda) \quad \forall u$$

\Rightarrow méthode itérative

Méthode de gradient - problème adjoint

- Conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} \partial_{\lambda} \mathcal{L} = 0 & \text{équation d'état} \\ \partial_y \mathcal{L} = 0 & \text{problème adjoint} \\ \partial_u \mathcal{L} = 0 & \text{condition d'optimalité} \end{cases} \Rightarrow \nabla_u \mathcal{J} = 0$$

= problème direct difficile

- Si y est solution de l'équation d'état et λ du problème adjoint

$$\nabla_u \mathcal{J}(y, u) = \partial_u \mathcal{L}(y, u, \lambda) \quad \forall u$$

\Rightarrow méthode itérative

Problème adjoint

Cas linéaire

- Équations d'état : $0 \rightarrow t_f$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \eta - c^2(h_c) (\Delta_H \eta + \partial_y \phi \partial_x B_z - \partial_x \phi \partial_y B_z) & = 0 \quad \Omega_H \\ \quad \quad \quad -\Delta_H \phi - S(h_c) \eta & = 0 \quad \Omega_H \\ \partial_n \eta - B_z (\partial_x \phi n_y - \partial_y \phi n_x) & = 0 \quad \partial\Omega_H \\ \quad \quad \quad \partial_n \phi & = 0 \quad \partial\Omega_H \end{array} \right.$$

- Problème adjoint : $t_f \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \alpha - c^2 \Delta_H \alpha - S \beta & = \sigma_0 \eta - \sigma_1 \partial_t^2 \eta \quad \Omega_H \\ \Delta_H \beta - c^2 (\partial_y \alpha \partial_x B_z - \partial_x \alpha \partial_y B_z) & = 0 \quad \Omega_H \\ \quad \quad \quad \partial_n \alpha & = 0 \quad \partial\Omega_H \\ \partial_n \beta + c^2 B_z (\partial_x \alpha n_y - \partial_y \alpha n_x) & = 0 \quad \partial\Omega_H \end{array} \right.$$

Problème adjoint

Cas linéaire

- Équations d'état : $0 \rightarrow t_f$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \eta - c^2(h_c) (\Delta_H \eta + \partial_y \phi \partial_x B_z - \partial_x \phi \partial_y B_z) & = 0 \quad \Omega_H \\ \quad \quad \quad -\Delta_H \phi - S(h_c) \eta & = 0 \quad \Omega_H \\ \partial_n \eta - B_z (\partial_x \phi n_y - \partial_y \phi n_x) & = 0 \quad \partial\Omega_H \\ \quad \quad \quad \partial_n \phi & = 0 \quad \partial\Omega_H \end{array} \right.$$

- Problème adjoint : $t_f \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \alpha - c^2 \Delta_H \alpha - S \beta & = \sigma_0 \eta - \sigma_1 \partial_t^2 \eta \quad \Omega_H \\ \Delta_H \beta - c^2 (\partial_y \alpha \partial_x B_z - \partial_x \alpha \partial_y B_z) & = 0 \quad \Omega_H \\ \quad \quad \quad \partial_n \alpha & = 0 \quad \partial\Omega_H \\ \partial_n \beta + c^2 B_z (\partial_x \alpha n_y - \partial_y \alpha n_x) & = 0 \quad \partial\Omega_H \end{array} \right.$$

Gradients des fonctions coût

Cas linéaire

- Commande $h_c(t)$:

$$\nabla \mathcal{J}_1(h_c) = \frac{1}{h_c} \int_{\Omega_H} \left[\frac{\rho_c h_a}{\rho_c h_a + \rho_a h_c} \alpha \partial_t^2 \eta - S \beta \eta \right] + Q_1 h_c.$$

- Commande $b_z(x, y)$:

$$\nabla \mathcal{J}_2(b_z) = \int_0^{t_f} c^2 (\partial_y \alpha \partial_x \varphi - \partial_x \alpha \partial_y \varphi) + Q_2 t_f b_z.$$

Gradients des fonctions coût

Cas linéaire

- Commande $h_c(t)$:

$$\nabla \mathcal{J}_1(h_c) = \frac{1}{h_c} \int_{\Omega_H} \left[\frac{\rho_c h_a}{\rho_c h_a + \rho_a h_c} \alpha \partial_t^2 \eta - S \beta \eta \right] + Q_1 h_c.$$

- Commande $b_z(x, y)$:

$$\nabla \mathcal{J}_2(b_z) = \int_0^{t_f} c^2 (\partial_y \alpha \partial_x \varphi - \partial_x \alpha \partial_y \varphi) + Q_2 t_f b_z.$$

Discrétisation

Cas linéaire

- En espace : décomposition **spectrale**

$$X(t, x, y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} X_{m,n}(t) f_{m,n}(x, y) \quad \text{pour } X = \eta, \phi, \alpha, \beta$$

$$\text{avec } f_{m,n}(x, y) = \frac{2 \epsilon_{m,n}}{\sqrt{L_x L_y}} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right)$$

→ formulation matricielle $X''(t) + R(t)X(t) = F(t)$

- En temps : méthode de **Newmark explicite**

$$X_{p+2} = 2X_{p+1} - X_p + \frac{\Delta t^2}{2} [F_p + F_{p-1} - (R_p X_p + R_{p-1} X_{p-1})]$$

Discrétisation

Cas linéaire

- En espace : décomposition **spectrale**

$$X(t, x, y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} X_{m,n}(t) f_{m,n}(x, y) \quad \text{pour } X = \eta, \phi, \alpha, \beta$$

$$\text{avec } f_{m,n}(x, y) = \frac{2 \epsilon_{m,n}}{\sqrt{L_x L_y}} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right)$$

→ formulation matricielle $X''(t) + R(t)X(t) = F(t)$

- En temps : méthode de **Newmark explicite**

$$X_{p+2} = 2X_{p+1} - X_p + \frac{\Delta t^2}{2} [F_p + F_{p-1} - (R_p X_p + R_{p-1} X_{p-1})]$$

Résultats numériques

Commande $h_c(t)$

- Problème non optimisé : $h_c = \text{const} = 0.05$
- $B_z = 0.5$, $t_f = 2$, $Q_1 = 1$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0$

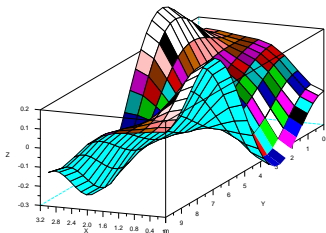
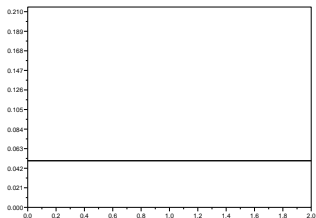


Figure: Commande h_c et déformée d'interface en t_f

Résultats numériques

Commande $h_c(t)$

- h_c indépendant du temps : gain de 40% sur \mathcal{J}_1^0
- h_c dépendant du temps : gain de 42% sur \mathcal{J}_1^0

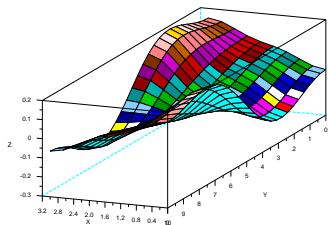
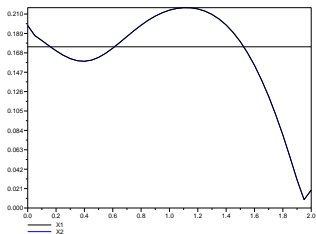


Figure: Commande h_c et déformée d'interface optimisée en t_f

Résultats numériques

Commande $B_z(x, y)$

- problème non optimisé : $B_z = \text{const} = 0.5$
- $h_c = 0.05$, $t_f = 2$, $Q_2 = 10^{-4}$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 0$

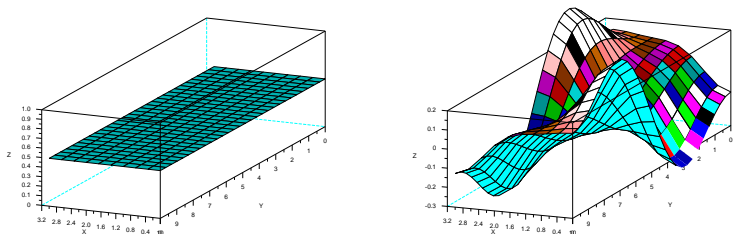


Figure: Commande B_z et déformée d'interface non optimisée en t_f

Résultats numériques

Commande $B_z(x, y)$

- gain de 9% sur \mathcal{J}_2^0

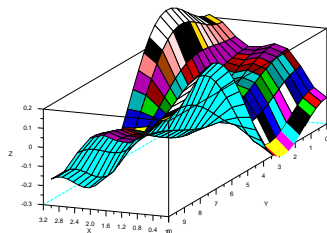
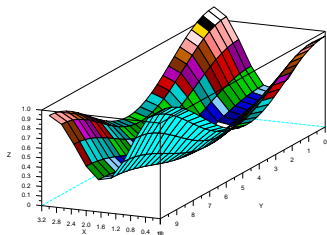


Figure: Commande B_z et déformée d'interface optimisée en t_f

Résultats numériques

Commande $B_z(\mathbf{t}, x, y)$: contrôle de la déformée ($\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 0$)

Résultats numériques

Commande $B_z(\dot{t}, x, y)$: contrôle de la vitesse de déformation ($\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 1$)

Cas non linéaire

Paramétrisation de l'interface

- Problème de Stokes bifluide

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} [\eta D(\mathbf{u})] + \nabla p & = \rho \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} & = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \eta D(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \int_0^L h & = V_0^{\text{alu}} \quad \text{fixé,} \end{array} \right.$$

$$\Sigma = \{(x, h(x)), x \in [0, L]\} \Rightarrow \mathbf{n}_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \begin{pmatrix} -h'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Discontinuité de la densité à l'interface :

$$\rho(x, z, h(x)) = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } z < h(x) \\ \rho_2 & \text{si } z > h(x) \end{cases}$$

Cas non linéaire

Paramétrisation de l'interface

- Problème de Stokes bifluide

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} [\eta D(\mathbf{u})] + \nabla p & = \rho \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} & = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \eta D(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \int_0^L h & = V_0^{\text{alu}} \quad \text{fixé,} \end{array} \right.$$

$$\Sigma = \{(x, h(x)), x \in [0, L]\} \Rightarrow \mathbf{n}_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \begin{pmatrix} -h'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Discontinuité de la densité à l'interface :

$$\rho(x, z, h(x)) = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } z < h(x) \\ \rho_2 & \text{si } z > h(x) \end{cases}$$

Cas non linéaire

Gradient de la fonction coût

- Gradient de la fonction coût :

$$\nabla \mathcal{J}_3(f) = \alpha + Q_3 f$$

avec α solution du

- problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} [\eta D(\alpha)] + \nabla \beta + \delta_{\Sigma} \mu n_{\Sigma} & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \alpha & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \alpha \cdot n & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ [\eta D(\alpha)] n \cdot t & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ -\alpha \cdot (\rho_2 - \rho_1) g + u_x \partial_x \mu + \nu & = h - h_0 \quad \text{sur } [0, L] \end{array} \right.$$

Cas non linéaire

Gradient de la fonction coût

- Gradient de la fonction coût :

$$\nabla \mathcal{J}_3(f) = \alpha + Q_3 f$$

avec α solution du



- problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\operatorname{div} [\eta D(\alpha)] + \nabla \beta + \delta_{\Sigma} \mu n_{\Sigma} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \alpha & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \alpha \cdot n & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ [\eta D(\alpha)] n \cdot t & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ -\alpha \cdot (\rho_2 - \rho_1) g + u_x \partial_x \mu + \nu & = & h - h_0 \quad \text{sur } [0, L] \end{array} \right.$$

Résumé

- Cas linéaire :
l'interface a pu être stabilisée au moyen de deux paramètres importants du modèle : h_c et B_z
- Cas non linéaire :
une paramétrisation de l'interface a permis d'exhiber un gradient et un problème adjoint
- Perspectives
 - Implémentation du contrôle sur le modèle non linéaire
 - Résolution du problème adjoint ?..

Références

-  J.-F. Gerbeau, C. Le Bris and T. Lelièvre.
Mathematical methods for the Magnetohydrodynamics of liquid metals.
Oxford University Press, 2006, à paraître.
-  J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, A. Orriols, T. Tomasino.
Linear versus Nonlinear Approaches for the Stability Analysis of Aluminium Production Cells.
ECCOMAS, 2006, à paraître.