

Analyse d'un modèle ϵ -arbitrage

Marie-Noëlle Le Roux

Université Bordeaux1

2 juin 2006

Etant donnée une option européenne (put ou call), on veut résoudre le problème de réplication optimale :

Trouver une stratégie de portefeuille autofinancé qui approche le mieux possible la fonction de payoff à maturité

Exemple : cas d'un put : fonction de payoff : $F(P) = \text{Max}(K - P, 0)$
 K prix d'exercice et P prix de l'actif sous-jacent.

Cas des marchés complets : il est possible de trouver un portefeuille qui réplique exactement le payoff

Modèle de Black and Scholes (1973)

Marchés incomplets : (par exemple, volatilité stochastique) : une réplication exacte est impossible.

Etant donnée une option européenne (put ou call), on veut résoudre le problème de réplication optimale :

Trouver une stratégie de portefeuille autofinancé qui approche le mieux possible la fonction de payoff à maturité

Exemple : cas d'un put : fonction de payoff : $F(P) = \text{Max}(K - P, 0)$
 K prix d'exercice et P prix de l'actif sous-jacent.

Cas des marchés complets : il est possible de trouver un portefeuille qui réplique exactement le payoff

Modèle de Black and Scholes (1973)

Marchés incomplets : (par exemple, volatilité stochastique) : une réplication exacte est impossible.

Etant donnée une option européenne (put ou call), on veut résoudre le problème de réplication optimale :

Trouver une stratégie de portefeuille autofinancé qui approche le mieux possible la fonction de payoff à maturité

Exemple : cas d'un put : fonction de payoff : $F(P) = \text{Max}(K - P, 0)$
 K prix d'exercice et P prix de l'actif sous-jacent.

Cas des marchés complets : il est possible de trouver un portefeuille qui réplique exactement le payoff

Modèle de Black and Scholes (1973)

Marchés incomplets : (par exemple, volatilité stochastique) : une réplication exacte est impossible.

Pb : comment peut-on approcher au mieux la fonction de payoff à maturité ?

Bertsimas, Kogan, Lo (2001)

Portefeuille constitué d'actions et d'actifs non risqués :

$V(\tau)$ valeur du portefeuille à l'instant τ

$\theta(\tau)$ nombre d'actions détenues, $P(\tau)$ prix de l'action, B valeur des actifs non risqués.

$$V(\tau) = \theta(\tau)P(\tau) + B(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T$$

On cherche une stratégie de portefeuille $\theta(\tau)$ telle que la valeur terminale $V(T)$ soit aussi proche que possible de $F(P, \sigma)$ (σ : volatilité).

$$\epsilon^2(V_0) = \min_{\theta} E((V(T) - F(P(T), \sigma(T)))^2 / (V_0, P_0, \sigma_0))$$

$\epsilon(V_0)$ erreur de réplication

$\epsilon^* = \min_{V_0} \epsilon(V_0)$ erreur de réplication optimale

Pb : comment peut-on approcher au mieux la fonction de payoff à maturité ?

Bertsimas, Kogan, Lo (2001)

Portefeuille constitué d'actions et d'actifs non risqués :

$V(\tau)$ valeur du portefeuille à l'instant τ

$\theta(\tau)$ nombre d'actions détenues, $P(\tau)$ prix de l'action, B valeur des actifs non risqués.

$$V(\tau) = \theta(\tau)P(\tau) + B(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T$$

On cherche une stratégie de portefeuille $\theta(\tau)$ telle que la valeur terminale $V(T)$ soit aussi proche que possible de $F(P, \sigma)$ (σ : volatilité).

$$\epsilon^2(V_0) = \min_{\theta} E((V(T) - F(P(T), \sigma(T)))^2 / (V_0, P_0, \sigma_0))$$

$\epsilon(V_0)$ erreur de réplication

$\epsilon^* = \min_{V_0} \epsilon(V_0)$ erreur de réplication optimale

Black and Scholes : il existe des stratégies de réplication optimale pour lesquelles $\epsilon^* = 0$

Marchés incomplets : ce n'est plus le cas.

$$dP = \mu P dt + \sigma P dW_P ; d\sigma = g(\sigma) dt + k \sigma dW_\sigma$$

W_P et W_σ mouvements browniens de covariance $dW_P dW_\sigma = \rho dt$

$$J(\tau, V, P, \sigma) = \min_{\theta(s), s \geq \tau} E \left((V(T) - F(P(T), \sigma(T)))^2 / (V(\tau), P(\tau), \sigma(\tau)) \right)$$

J est quadratique en V : $J = a(V - b)^2 + c$

a, b, c solutions d'un système d'EDP.

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} - g_1(\sigma) \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \rho^2 k^2 \frac{\sigma^2}{a} \left(\frac{\partial a}{\partial \sigma} \right)^2 + a f^2(\sigma)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \tau} = & -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial P} - g_2(\sigma) \frac{\partial b}{\partial \sigma} \\ & - (1 - \rho^2) k^2 \frac{\sigma^2}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial b}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} = & -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial P} - g(\sigma) \frac{\partial c}{\partial \sigma} - \sigma f(\sigma) P \frac{\partial c}{\partial P} \\ & - (1 - \rho^2) k^2 \sigma^2 a \left(\frac{\partial b}{\partial \sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} - g_1(\sigma) \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \rho^2 k^2 \frac{\sigma^2}{a} \left(\frac{\partial a}{\partial \sigma} \right)^2 + a f^2(\sigma)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \tau} = & -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial P} - g_2(\sigma) \frac{\partial b}{\partial \sigma} \\ & - (1 - \rho^2) k^2 \frac{\sigma^2}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial b}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} = & -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial P} - g(\sigma) \frac{\partial c}{\partial \sigma} - \sigma f(\sigma) P \frac{\partial c}{\partial P} \\ & - (1 - \rho^2) k^2 \sigma^2 a \left(\frac{\partial b}{\partial \sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} - g_1(\sigma) \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \rho^2 k^2 \frac{\sigma^2}{a} \left(\frac{\partial a}{\partial \sigma} \right)^2 + a f^2(\sigma)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \tau} = & -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial P} - g_2(\sigma) \frac{\partial b}{\partial \sigma} \\ & - (1 - \rho^2) k^2 \frac{\sigma^2}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} \frac{\partial b}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} = & -\frac{k^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial P^2} - \rho k \sigma^2 P \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial P} - g(\sigma) \frac{\partial c}{\partial \sigma} - \sigma f(\sigma) P \frac{\partial c}{\partial P} \\ & - (1 - \rho^2) k^2 \sigma^2 a \left(\frac{\partial b}{\partial \sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

$$g(\sigma) = -\delta\sigma(\sigma - \sigma_1) \quad (\delta > 0, \sigma_1 \in]0, 1[)$$

$$g_1(\sigma) = g(\sigma) - 2\rho k\sigma f(\sigma), g_2(\sigma) = g(\sigma) - \rho k\sigma f(\sigma)$$

$$f(\sigma) = \begin{cases} \frac{\mu}{\sigma} & \text{si } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{\sigma} & \text{si } \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

Conditions à maturité : $a(T) = 1, b(T) = F(P, \sigma), c(T) = 0$;

contrôle optimal :

$$\theta^* = \frac{\partial b}{\partial P} + \frac{\rho k}{P} \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{V - b}{a} \frac{\rho k}{P} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \frac{f(\sigma)^2}{P} (V - b).$$

erreur de réplication en fonction de V_0 : $J(0) = a(0)(V_0 - b(0))^2 + c(0)$

$$\epsilon^* = \sqrt{c(0)} \text{ et } \theta^*(0) = \frac{\partial b}{\partial P}(0) + \frac{\rho k}{P} \frac{\partial b}{\partial \sigma}(0).$$

$$g(\sigma) = -\delta\sigma(\sigma - \sigma_1) \quad (\delta > 0, \sigma_1 \in]0, 1[)$$

$$g_1(\sigma) = g(\sigma) - 2\rho k\sigma f(\sigma), g_2(\sigma) = g(\sigma) - \rho k\sigma f(\sigma)$$

$$f(\sigma) = \begin{cases} \frac{\mu}{\sigma} & \text{si } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{\sigma_0}{\sigma} & \text{si } \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

Conditions à maturité : $a(T) = 1, b(T) = F(P, \sigma), c(T) = 0$;

contrôle optimal :

$$\theta^* = \frac{\partial b}{\partial P} + \frac{\rho k}{P} \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{V - b}{a} \frac{\rho k}{P} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \frac{f(\sigma)^2}{P} (V - b) .$$

erreur de réplcation en fonction de V_0 : $J(0) = a(0)(V_0 - b(0))^2 + c(0)$

$$\epsilon^* = \sqrt{c(0)} \text{ et } \theta^*(0) = \frac{\partial b}{\partial P}(0) + \frac{\rho k}{P} \frac{\partial b}{\partial \sigma}(0) .$$

La réplication exacte est possible si $k^2(1 - \rho^2) = 0$, ce qui correspond aux 2 cas :

- la volatilité est une fonction déterministe du temps (On retrouve BS)

- Les mouvements browniens régissant les prix de l'action et la volatilité sont parfaitement corrélés.

$$t = T - \tau; \quad u_1 = \ln a$$
$$\sigma \longrightarrow x, \quad P \longrightarrow y, \quad b \longrightarrow u_2, \quad c \longrightarrow u_3$$

Conditions initiales : $u_1(0) = 0; \quad u_2(0) = F; \quad u_3(0) = 0$

La réplication exacte est possible si $k^2(1 - \rho^2) = 0$, ce qui correspond aux 2 cas :

- la volatilité est une fonction déterministe du temps (On retrouve BS)

- Les mouvements browniens régissant les prix de l'action et la volatilité sont parfaitement corrélés.

$$t = T - \tau; \quad u_1 = \ln a$$
$$\sigma \longrightarrow x, \quad P \longrightarrow y, \quad b \longrightarrow u_2, \quad c \longrightarrow u_3$$

Conditions initiales : $u_1(0) = 0; \quad u_2(0) = F; \quad u_3(0) = 0$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - g_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} + k^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{2} \right) x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + f^2(x) = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - g_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$- (1 - \rho^2) k^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} - g(x) \frac{\partial u_3}{\partial x} - x f(x) y \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

$$- (1 - \rho^2) k^2 x^2 \exp(u_1) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - g_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} + k^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{2} \right) x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + f^2(x) = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - g_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$- (1 - \rho^2) k^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} - g(x) \frac{\partial u_3}{\partial x} - x f(x) y \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

$$- (1 - \rho^2) k^2 x^2 \exp(u_1) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - g_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} + k^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{2} \right) x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + f^2(x) = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - g_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$- (1 - \rho^2) k^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} - g(x) \frac{\partial u_3}{\partial x} - x f(x) y \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

$$- (1 - \rho^2) k^2 x^2 \exp(u_1) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Calcul de u1

$$\lambda = \rho^2 - \frac{1}{2} ; F_1(x) = f^2(x)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{2}k^2x^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - g_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + F_1(x) = 0$$

- $F_1 \geq 0$, décroissante et bornée, F_1' bornée
- $\hat{F}(x) = xF_1'(x)$ bornée
- $g_1(x) = x\phi(x)$, $\phi(x) = -\delta(x - \sigma_1) - 2\rho k f(x)$
 - ϕ bornée sur $[0, \sigma_2]$
 - $\phi \leq 0$, décroissante sur $[\sigma_2, +\infty[$

Pb parabolique :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{2}k^2 x^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + F_1(x) = 0$$

$$V_1 = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) / \frac{v}{1+x} \in L^2(\mathbb{R}^+), \frac{xv'}{1+x} \in L^2(\mathbb{R}^+) \right\}$$

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

(x_i) suite de réels strictement croissante ($x_0 = 0$) ; $h_i = x_i - x_{i-1}$,
 $I_i = (x_{i-1}, x_i)$, $I_{N+1} = (x_N, +\infty)$

$$V_{1h} = \{ v_h \in C^0(\mathbb{R}^+) / v_h|_{I_i} \in P_1, 1 \leq i \leq N, v_h|_{I_{N+1}} \in P_0 \}$$

$$(u_{1h}^{n+1}, v_h)_h + \Delta t_n a(u_{1h}^{n+1}, v_h) = (u_{1h}^n, v_h)_h - \Delta t_n (\pi_h F_1, v_h)_h, \forall v_h \in V_{1h}$$

terme du premier ordre non linéaire : $\lambda x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2$

$$v_{h|I_i}^n = v_i^n = \frac{u_{1i}^n - u_{1,i-1}^n}{h_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad v_{N+1}^n = 0.$$

$$u_{1i}^{n+\frac{1}{2}} = u_{1i}^n - \lambda \Delta t_n x_i^2 (v_i^n)^2 \quad \text{si } \lambda > 0$$

$$u_{1i}^{n+\frac{1}{2}} = u_{1i}^n - \lambda \Delta t_n x_{i+1}^2 (v_{i+1}^n)^2 \quad \text{si } \lambda < 0$$

terme du premier ordre linéaire : schéma décentré implicite.

terme du premier ordre non linéaire : $\lambda x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2$

$$v_{h|I_i}^n = v_i^n = \frac{u_{1i}^n - u_{1,i-1}^n}{h_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad v_{N+1}^n = 0.$$

$$u_{1i}^{n+\frac{1}{2}} = u_{1i}^n - \lambda \Delta t_n x_i^2 (v_i^n)^2 \quad \text{si } \lambda > 0$$

$$u_{1i}^{n+\frac{1}{2}} = u_{1i}^n - \lambda \Delta t_n x_{i+1}^2 (v_{i+1}^n)^2 \quad \text{si } \lambda < 0$$

terme du premier ordre linéaire : schéma décentré implicite.

$$u_{10}^{n+1} = u_{10}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n F_{10}$$

$$\begin{aligned} u_{1i}^{n+1} + \Delta t_n \left(\alpha_i \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \gamma_i \left(\frac{1 - \delta_i}{h_{i+1}} - \frac{\delta_i}{h_i} \right) \right) u_{1i}^{n+1} \\ - \frac{\Delta t_n}{h_i} (\alpha_i - \delta_i \gamma_i) u_{1,i-1}^{n+1} - \frac{\Delta t_n}{h_{i+1}} (\alpha_i + (1 - \delta_i) \gamma_i) u_{1,i+1}^{n+1} \\ = u_{1i}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n F_{1i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1N}^{n+1} + \frac{\Delta t_n}{h_N} (\alpha_N - \gamma_N) \left(u_{1N}^{n+1} - u_{1,N-1}^{n+1} \right) \\ = u_{1N}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n F_{1N} \end{aligned}$$

avec $\gamma_i = g_1(x_i)$, $1 \leq i \leq N$, $\delta_i = 0$ si $\gamma_i > 0$, $\delta_i = 1$ si $\gamma_i < 0$

$$\alpha_i = \frac{k^2 x_i^2}{h_i + h_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \alpha_N = \frac{k^2 x_N^2}{h_N + 2(1+x_N)}$$

Propriétés du schéma :

$$(I + \Delta t_n A_h) U_{1h}^{n+1} = U_{1h}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n F_{1h} ,$$

A_h tridiagonale monotone

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n - \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} (x_i^2 (v_i^n)^2 - x_{i-1}^2 (v_{i-1}^n)^2) \quad \text{si } \lambda > 0$$

$$\text{Condition de stabilité : } \sup_{i \geq 1} \left| \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i^2 v_i^n \right| \leq 1 \text{ si } \lambda > 0$$

$$\text{alors } v_h^n \geq 0 \implies v_h^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$(I + \Delta t_n B_h) V_h^{n+1} = V_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n G_{1h} , \quad G_{1i} = \frac{F_{1i} - F_{1,i-1}}{h_i}$$

F_1 décroissante : second membre positif

Propriétés du schéma :

$$(I + \Delta t_n A_h) U_{1h}^{n+1} = U_{1h}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n F_{1h} ,$$

A_h tridiagonale monotone

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n - \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} (x_i^2 (v_i^n)^2 - x_{i-1}^2 (v_{i-1}^n)^2) \quad \text{si } \lambda > 0$$

$$\text{Condition de stabilité : } \sup_{i \geq 1} \left| \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i^2 v_i^n \right| \leq 1 \text{ si } \lambda > 0$$

$$\text{alors } v_h^n \geq 0 \implies v_h^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$(I + \Delta t_n B_h) V_h^{n+1} = V_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n G_{1h} , \quad G_{1i} = \frac{F_{1i} - F_{1,i-1}}{h_i}$$

F_1 décroissante : second membre positif

Propriétés du schéma :

$$(I + \Delta t_n A_h) U_{1h}^{n+1} = U_{1h}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n F_{1h} ,$$

A_h tridiagonale monotone

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n - \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} (x_i^2 (v_i^n)^2 - x_{i-1}^2 (v_{i-1}^n)^2) \quad \text{si } \lambda > 0$$

Condition de stabilité : $\sup_{i \geq 1} \left| \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i^2 v_i^n \right| \leq 1$ si $\lambda > 0$

alors $v_h^n \geq 0 \implies v_h^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$

$$(I + \Delta t_n B_h) V_h^{n+1} = V_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n G_{1h} , \quad G_{1i} = \frac{F_{1i} - F_{1,i-1}}{h_i}$$

F_1 décroissante : second membre positif

$I + \Delta t_n B_h$ monotone si $1 - \frac{\Delta t_n}{h_i} (\gamma_i - \gamma_{i-1}) > 0$.

g_1 décroissante pour $x \geq \sigma_2$,

Si $x \leq \sigma_2$, $|g'_1(x)| \leq c_1$,

Donc $I + \Delta t_n B_h$ est monotone pour $c_1 \Delta t_n < 1$

et $v_h^n \geq 0$

D'où $-t_n F_1(0) \leq u_h^n \leq 0$

$\|v_h^n\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq t_n F_1(0)$

$I + \Delta t_n B_h$ monotone si $1 - \frac{\Delta t_n}{h_i} (\gamma_i - \gamma_{i-1}) > 0$.

g_1 décroissante pour $x \geq \sigma_2$,

Si $x \leq \sigma_2$, $|g_1'(x)| \leq c_1$,

Donc $I + \Delta t_n B_h$ est monotone pour $c_1 \Delta t_n < 1$

et $v_h^n \geq 0$

D'où $-t_n F_1(0) \leq u_h^n \leq 0$

$\|v_h^n\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq t_n F_1(0)$

Estimation de $\hat{v}_h^n = xv_h^n$

Condition de stabilité : $\sup_{i \geq 1} \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i (\hat{v}_i^n + \hat{v}_{i-1}^n) \leq 1$

alors $\left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$

$$(I + \Delta t_n C_h) \hat{V}_n^{n+1} = \hat{V}_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n \hat{F}_h$$

Hypothèse sur la suite (x_i)

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} - \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} \geq -c \frac{h_i}{x_i}, \quad (c > 0)$$

$$\frac{x_N}{h_N + 2(1 + x_N)} - \frac{x_{N-1}}{x_N} \frac{h_N}{h_N + h_{N-1}} \geq -c \frac{h_N}{x_N}$$

$$(1 - C \Delta t_n) \left\| \hat{v}_h^{n+1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} + \Delta t_n \left\| \hat{F} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$$

Estimation de $\hat{v}_h^n = xv_h^n$

Condition de stabilité : $\sup_{i \geq 1} \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i (\hat{v}_i^n + \hat{v}_{i-1}^n) \leq 1$

alors $\left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$

$$(I + \Delta t_n C_h) \hat{V}_n^{n+1} = \hat{V}_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n \hat{F}_h$$

Hypothèse sur la suite (x_i)

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} - \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} \geq -c \frac{h_i}{x_i}, \quad (c > 0)$$

$$\frac{x_N}{h_N + 2(1 + x_N)} - \frac{x_{N-1}}{x_N} \frac{h_N}{h_N + h_{N-1}} \geq -c \frac{h_N}{x_N}$$

$$(1 - C \Delta t_n) \left\| \hat{v}_h^{n+1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} + \Delta t_n \left\| \hat{F} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$$

Estimation de $\hat{v}_h^n = xv_h^n$

Condition de stabilité : $\sup_{i \geq 1} \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i (\hat{v}_i^n + \hat{v}_{i-1}^n) \leq 1$

alors $\left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$

$$(I + \Delta t_n C_h) \hat{V}_n^{n+1} = \hat{V}_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n \hat{F}_h$$

Hypothèse sur la suite (x_i)

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} - \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} \geq -c \frac{h_i}{x_i}, \quad (c > 0)$$

$$\frac{x_N}{h_N + 2(1 + x_N)} - \frac{x_{N-1}}{x_N} \frac{h_N}{h_N + h_{N-1}} \geq -c \frac{h_N}{x_N}$$

$$(1 - C \Delta t_n) \left\| \hat{v}_h^{n+1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} + \Delta t_n \left\| \hat{F} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$$

Estimation de $\hat{v}_h^n = xv_h^n$

Condition de stabilité : $\sup_{i \geq 1} \lambda \frac{\Delta t_n}{h_i} x_i (\hat{v}_i^n + \hat{v}_{i-1}^n) \leq 1$

alors $\left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$

$$(I + \Delta t_n C_h) \hat{V}_n^{n+1} = \hat{V}_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t_n \hat{F}_h$$

Hypothèse sur la suite (x_i)

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} - \frac{x_{i-1}}{x_i} \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} \geq -c \frac{h_i}{x_i}, \quad (c > 0)$$

$$\frac{x_N}{h_N + 2(1 + x_N)} - \frac{x_{N-1}}{x_N} \frac{h_N}{h_N + h_{N-1}} \geq -c \frac{h_N}{x_N}$$

$$(1 - C \Delta t_n) \left\| \hat{v}_h^{n+1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \left\| \hat{v}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} + \Delta t_n \left\| \hat{F} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$$

Choix de la suite (x_i) :

$$x_i = ih, 1 \leq i \leq n_0, n_0 h = 1 ; x_i = e^{\theta h} x_{i-1}, i \geq n_0 + 1$$

$$x_N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right), N = \mathcal{O}\left(\frac{|\ln h|}{h}\right)$$

$$\text{et donc } \frac{x_i}{h_i} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)$$

La condition de stabilité s'écrit : $\frac{\Delta t_n}{h} \leq C$.

$$\|v_h^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C, \text{Var}(v_h^n; \mathbb{R}^+) \leq C$$

Convergence vers une solution faible, d'où existence d'une solution

et unicité de la solution faible.

Choix de la suite (x_i) :

$$x_i = ih, 1 \leq i \leq n_0, n_0 h = 1 ; x_i = e^{\theta h} x_{i-1}, i \geq n_0 + 1$$

$$x_N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right), N = \mathcal{O}\left(\frac{|\ln h|}{h}\right)$$

$$\text{et donc } \frac{x_i}{h^i} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)$$

La condition de stabilité s'écrit : $\frac{\Delta t_n}{h} \leq C$.

$$\|v_h^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C, \text{Var}(v_h^n; \mathbb{R}^+) \leq C$$

Convergence vers une solution faible, d'où existence d'une solution

et unicité de la solution faible.

Choix de la suite (x_i) :

$$x_i = ih, 1 \leq i \leq n_0, n_0 h = 1 ; x_i = e^{\theta h} x_{i-1}, i \geq n_0 + 1$$

$$x_N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right), N = \mathcal{O}\left(\frac{|\ln h|}{h}\right)$$

$$\text{et donc } \frac{x_i}{h^i} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)$$

La condition de stabilité s'écrit : $\frac{\Delta t_n}{h} \leq C$.

$$\|v_h^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C, \text{Var}(v_h^n; \mathbb{R}^+) \leq C$$

Convergence vers une solution faible, d'où existence d'une solution

et unicité de la solution faible.

$$u_{1h\Delta t} = u_{1h}^n + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} (u_{1h}^{n+1} - u_{1h}^n), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}$$

Convergence uniforme vers u_1 sur tout compact de $[0, T] \times \mathbb{R}^+$.

u_1 solution faible : $u_1 \in C(0, T; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^+))$, $x \frac{\partial u_1}{\partial x} \in C(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^+))$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_{\mathbb{R}^+} u_1(T) \phi(T) dx - \frac{k^2}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \phi) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} g_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \phi dx dt - \lambda \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} x^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \phi dx dt = \\ & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} F_1 \phi dx dt \end{aligned}$$

pour toute fonction ϕ à support compact dans $[0, T] \times \mathbb{R}^+$,
 $\phi \in C^1(0, T \times \mathbb{R}^+)$

Unicité de la solution : $w = u_1 - \hat{u}_1$, (u_1 et \hat{u}_1 2 solutions)

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}k^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g_1(x) \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda x^2 \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} \right) = 0.$$

$0 \leq \psi(x \leq 1, \psi(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$, $\psi(x) = 0$ si $x \geq 2$,
 $\psi_\nu(x) = \psi(x/\nu)$

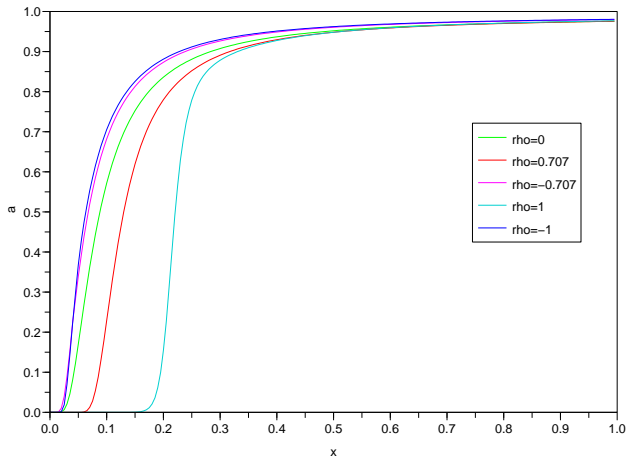
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{+\infty} w^2 \frac{\psi_\nu}{(1+x)^2} dx \right) + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{x^2}{(1+x)^2} \psi_\nu dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} w^2 \frac{g_1(x)}{(1+x)^2} \frac{d\psi_\nu}{dx} dx \\ & = -\frac{k^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial x} w \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{d\psi_\nu}{dx} dx - k^2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial x} w \frac{x}{(1+x)^3} \psi_\nu dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} w^2 \psi_\nu \frac{d}{dx} \left(\frac{g_1(x)}{(1+x)^2} \right) dx - \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial x} w \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} \right) \frac{x^2}{(1+x)^2} \psi_\nu dx \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{+\infty} w^2 \frac{\psi_\nu}{(1+x)^2} dx \right) + k^2 \left(\frac{1}{2} - 2\alpha \right) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{x^2}{(1+x)^2} \psi_\nu dx \\ & \leq \frac{C}{\nu} + C_1 \int_0^{+\infty} w^2 \frac{\psi_\nu}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \int_0^{+\infty} \frac{w^2}{(1+x)^2} dx = 0 \text{ et } w = 0$$

Résultats numériques : $k = 0.4$, $\delta = 2$, $\sigma_1 = 0.153$, $\mu = 0.7$



Calcul de u2

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - g_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$-(1 - \rho^2) k^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

avec la condition initiale : $u_2(0) = F$

F est la fonction de payoff ; $F(y) = \max(K - y, 0)$ dans le cas d'un put.

(K est le prix d'exercice).

$$g_2(x) = -\delta x(x - \sigma_1) - \rho k x f(x)$$

Changement de fonction : $\hat{u}_2 = e^{-\alpha x} u_2$

La fonction \hat{u}_2 est solution de :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial t} - \frac{k^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial x \partial y} \\ & - \left(\alpha k^2 x^2 + g_2(x) + (1 - \rho^2) k^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x} - \rho \alpha k x^2 y \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} \\ & - \left(\frac{\alpha^2 k^2}{2} x^2 + \alpha g_2(x) + (1 - \rho^2) \alpha k^2 x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \hat{u}_2 = 0 \end{aligned}$$

Formulation variationnelle :

$$\hat{V}_2 = \{ v \in \mathcal{D}'(\Omega) / v \in L^2(\Omega), xv \in L^2(\Omega), xv_x \in L^2(\Omega), xyv_y \in L^2(\Omega) \}$$

norme sur \hat{V}_2 :

$$\|v\|_{\hat{V}_2} = \left(\|xv_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|xyv_y\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^2$$

Forme bilinéaire sur $\hat{V}_2 \times \hat{V}_2$: $\hat{b}(u, v)$, $u, v \in \hat{V}_2$

Pour $|\rho| < 1$ et $k < \frac{2}{3}\delta$, il existe α tel que :

$$\hat{b}(v, v) \geq C \|v\|_{\hat{V}_2}^2 - c \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Déterminer $\hat{u}_2 \in C(0, T; \hat{V}_2) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega))$

$$\left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial t}, v \right) + \hat{b}(\hat{u}_2, v) = 0, \forall v \in \hat{V}_2$$

$$\hat{u}_2(0) = e^{-\alpha x} F$$

Le problème admet une solution unique.

Résolution numérique :

$$(x_i), 0 \leq i \leq N, h_i = x_i - x_{i-1}. (y_j), 0 \leq j \leq M, k_j = y_j - y_{j-1}$$

\mathcal{T}_h^1 : on découpe le rectangle $[0, x_N] \times [0, y_M]$ en rectangles de côtés h_i, k_j , puis par la première diagonale.

$$\mathcal{T}_h^2 = \{ K_j / K_j = (x_N, +\infty) \times (y_{j-1}, y_j), j = 1, M \}$$

$$\mathcal{T}_h^3 = \{ K_i / K_i = (x_{i-1}, x_i) \times (y_M, +\infty), i = 1, N \}$$

et on note $K_{NM} = (x_N, +\infty) \times (y_M, +\infty)$

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2 \cup \mathcal{T}_h^3 \cup K_{NM}$$

$$V_{2h} = \{ v_h \in C^0(\Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h^1, v_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h^2, v_h|_K \in P_{y1}$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h^3, v_h|_K \in P_{x1}, v_h|_{K_{NM}} \in P_0 \}$$

P_1 est l'ensemble des polynômes de degré un en x et en y ,

P_{y1} est l'ensemble des polynômes de degré un en y ,

P_{x1} est l'ensemble des polynômes de degré un en x

Résolution numérique :

$$(x_i), 0 \leq i \leq N, h_i = x_i - x_{i-1}. (y_j), 0 \leq j \leq M, k_j = y_j - y_{j-1}$$

\mathcal{T}_h^1 : on découpe le rectangle $[0, x_N] \times [0, y_M]$ en rectangles de côtés h_i, k_j , puis par la première diagonale.

$$\mathcal{T}_h^2 = \{ K_j / K_j = (x_N, +\infty) \times (y_{j-1}, y_j), j = 1, M \}$$

$$\mathcal{T}_h^3 = \{ K_i / K_i = (x_{i-1}, x_i) \times (y_M, +\infty), i = 1, N \}$$

et on note $K_{NM} = (x_N, +\infty) \times (y_M, +\infty)$

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2 \cup \mathcal{T}_h^3 \cup K_{NM}$$

$$V_{2h} = \{ v_h \in C^0(\Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h^1, v_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h^2, v_h|_K \in P_{y1}$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h^3, v_h|_K \in P_{x1}, v_h|_{K_{NM}} \in P_0 \}$$

P_1 est l'ensemble des polynômes de degré un en x et en y ,

P_{y1} est l'ensemble des polynômes de degré un en y ,

P_{x1} est l'ensemble des polynômes de degré un en x

Si $v_h \in V_{2h}$, $\hat{v}_h = e^{-\alpha x} v_h \in \hat{V}_2$

$$\tilde{v}_h = e^{-2\alpha x} v_h$$

$$\begin{aligned} b(u_h, v_h) &= \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \tilde{v}_h) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} x^2 \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \tilde{v}_h) dx dy + \\ &\rho k \int_{\Omega} x^2 \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (y \tilde{v}_h) dx dy \\ &- \int_{\Omega} x g_2(x) \frac{\partial u_h}{\partial x} \tilde{v}_h dx dy - (1 - \rho^2) k^2 \int_{\Omega} x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial x} \tilde{v}_h dx dy \end{aligned}$$

On a l'égalité : $b(u_h, v_h) = \hat{b}(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$, $\forall u_h, v_h \in V_{2h}$

On détermine u_{2h}^{n+1} solution du système linéaire :

$$(u_{2h}^{n+1} - u_{2h}^n, \tilde{v}_h)_h + b_h(u_{2h}^{n+1}, v_h) = 0$$

$$u_{2h}^0 = u_{0h}$$

Calcul de u_3

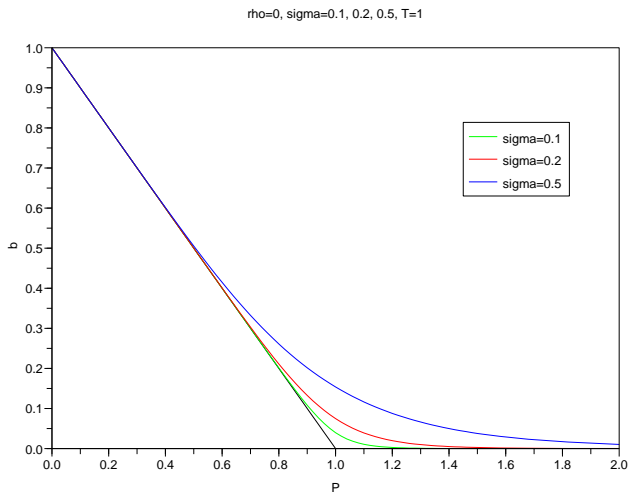
$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{k^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \rho k x^2 y \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} - g(x) \frac{\partial u_3}{\partial x} - x f(x) y \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ = (1 - \rho^2) k^2 x^2 \exp(u_1) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

avec la condition initiale $u_3(0) = 0$

$$g(x) = -\delta x(x - \sigma_1)$$

même méthode de résolution que pour u_2 .

Résultats numériques



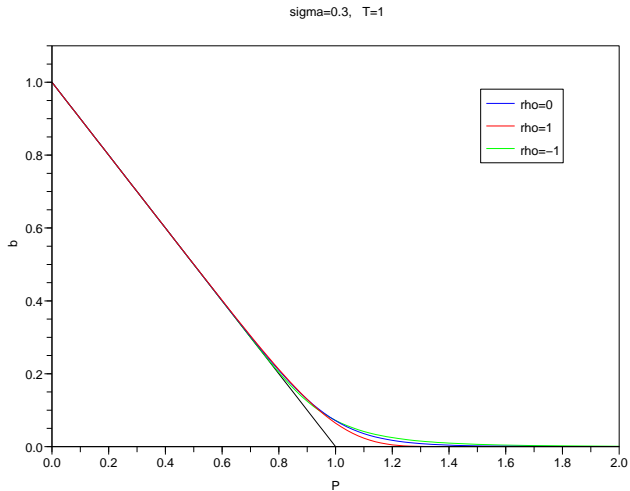


FIG.: b pour différentes valeurs de ρ

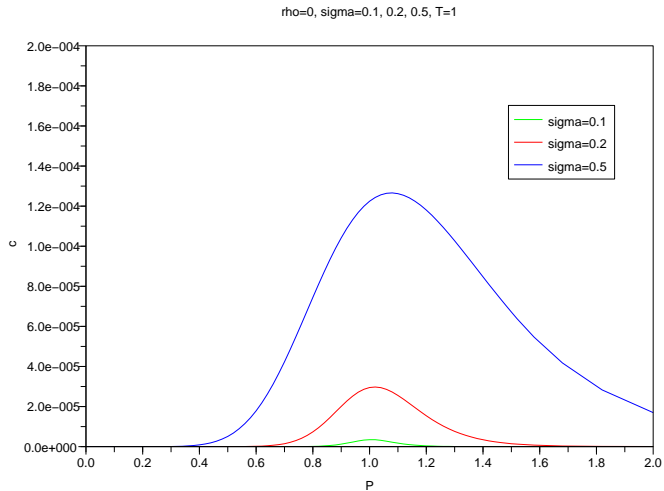


FIG.: c en fonction de P

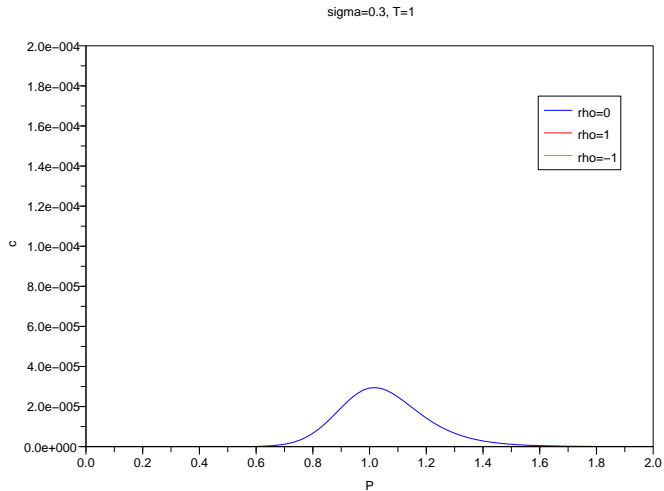


FIG.: c pour différentes valeurs de ρ

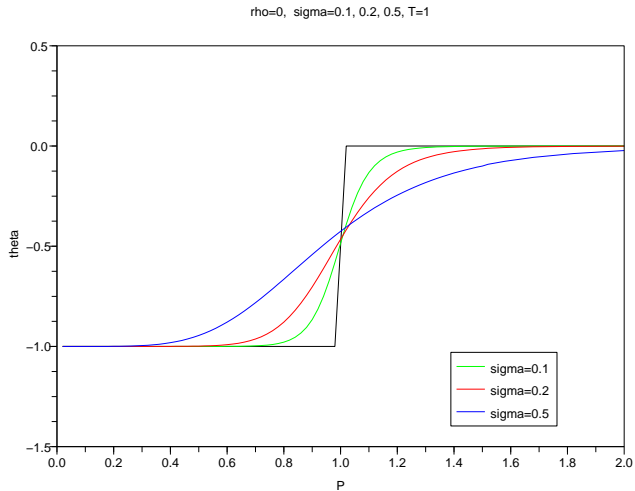


FIG.: theta en fonction de P

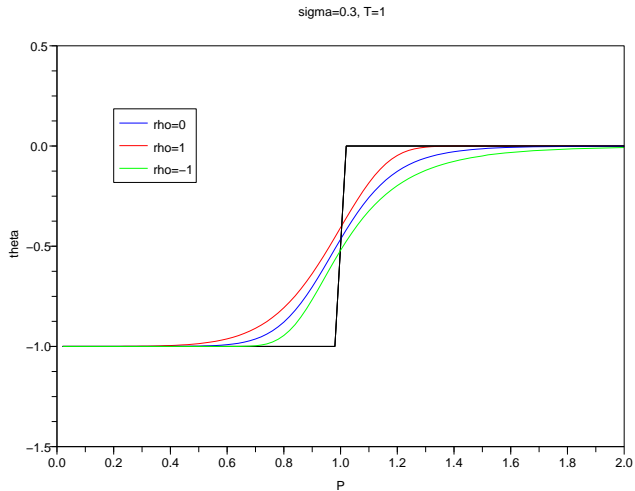


FIG.: theta pour différentes valeurs de rho

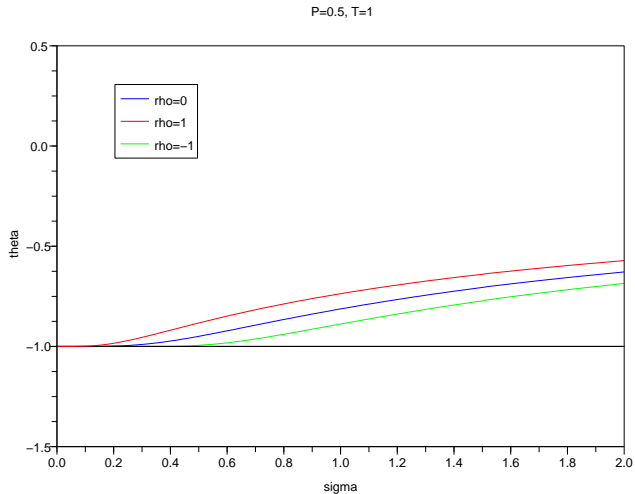


FIG.: theta en fonction de sigma