

Comment résoudre des problèmes impédants ?

F. Collino

F. Millot

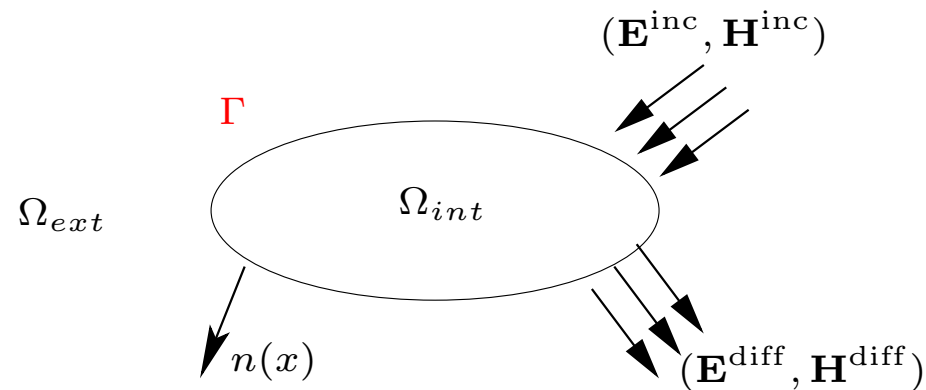
S. Pernet

CERFACS

Toulouse - France



Position du problème



- $$\begin{cases} \nabla \wedge (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}) - ikZ_0(\mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc}) & = 0 \\ \nabla \wedge (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc}) + ikZ_0^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}) & = 0 \end{cases} \text{ in } \Omega_{ext}$$
- condition sur l'obstacle (condition de Léontovitch)
$$\mathbf{E}_t - ikZ_0 \boldsymbol{\eta} \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{H} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ avec } \boldsymbol{\eta} \text{ donné}$$
- La condition de radiation de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\partial_r \mathbf{E}^{diff} - ik\mathbf{E}^{diff}) = 0$$

Formalisme des équations intégrales

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ in } \Omega_{ext} \iff \begin{pmatrix} \mathbf{J} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} \\ \mathbf{M} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \end{pmatrix} \text{ on } \Gamma$$

unknowns

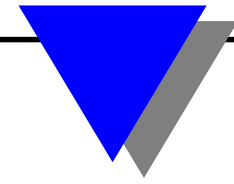
$$\begin{cases} \mathbf{E}_t(x) = \mathbf{E}_t^{\text{inc}}(x) + iZ_0(T\mathbf{J}(x))_t + (K\mathbf{M}(x))_t + \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{H}_t(x) = \mathbf{H}_t^{\text{inc}}(x) - (K\mathbf{J}(x))_t + iZ_0^{-1}(T\mathbf{M}(x))_t - \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{J}(x) \end{cases}$$

+ relation d'impédance

avec:

$$\begin{cases} T\mathbf{J}(x) = k \int_{\Gamma} (G(x, y)\mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x, y) \nabla_{\Gamma} \mathbf{J}(y)) d\Gamma(y) \\ K\mathbf{M}(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge \mathbf{M}(y) d\Gamma(y) \end{cases}$$

G fonction de Green



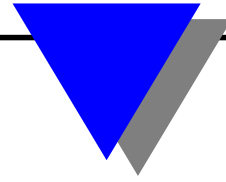
$$\begin{aligned} -(\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{\text{inc}})|_{\Gamma} \times \mathbf{n})(x) &= iZ_0(T\mathbf{J}(x) + K\mathbf{M}(x) - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times \mathbf{M}) \\ (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{inc}})|_{\Gamma} \times \mathbf{n})(x) &= +K\mathbf{J} + T\mathbf{M} - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{M} = -i\eta\mathbf{J}(x).$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{J}(x) = -i\eta^{-1}\mathbf{M}(x)$$

où η^{-1} est l'inverse de η

\implies quatre équations à deux inconnues



Quelques remarques:

- Conservation des flux \Rightarrow on garde les deux courants
 \Rightarrow double le nombre d'inconnues ?
- Opérateur d'impédance variable \Rightarrow robustesse ??
- Evaluation de l'opération de rotation $\mathbf{n} \times \cdot$ lorsque l'on utilise les éléments de Raviart-Thomas.



Choix de la formulation

1. Formulation à deux courants (Bachelot et al, 1995)

- Conservation des flux assurée de façon indépendante
- Opérateurs classiques
- facile a mettre en oeuvre un calcul multipôle
- Dégénère en EFIE sur les parties métalliques
- les deux courants comme inconnues \Rightarrow coût important

2. Formulation à un courant avec multiplicateur de Lagrange

- un courant (équivalent EFIE)
- consistance : choix de l'approximation du multiplicateur

3. Formulation de DESPRES

- Spectre réel positif
- résultats théoriques de convergence
- 4 fois plus d'inconnues que la EFIE



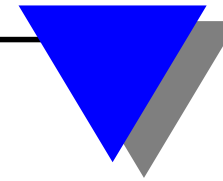
Question:

Comment choisir la formulation ?

1. objectif facile à résoudre par méthodes itératives
mise en oeuvre d'un calcul multipôle
2. précise
3. robuste (variations de l'impédance)
⇒ formulation à deux courants

Plan

1. Formulation à deux courants
2. Calcul multipôle
3. Résultats numériques



Formulation à deux courants (BGL)

- On forme la quantité

$$\int_{\Gamma} \left[- (\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{\text{inc}})|_{\Gamma} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{J}^t + (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{inc}})|_{\Gamma} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{M}^t \right] d\Gamma$$

- On se sert de la condition d'impédance pour les termes $\mathbf{n} \times$.

$$[A(\mathbf{J}, \mathbf{M})(\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t)] - \int_{\Gamma} \frac{k\eta}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^t + \int_{\Gamma} \frac{1}{2k\eta} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^t = -V(\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t)$$

Remarque:

- la condition d'impédance est vérifiée quand la solution est obtenue
- unicité de la solution dans le cas continu et discret



→ facile à résoudre par des méthodes itératives ?

Après discrétisation

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{M}_{\text{masse}} + \mathcal{A} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & K \\ K & T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathcal{M}_{\text{masse}}$: matrice creuse → interactions proches
- \mathcal{A} : calcul du produit matrice vecteur en utilisant 8 fois l'algorithme multipôle (4 fois pour J , 4 fois pour M).

Question: peut -on réduire ce coût
en utilisant seulement deux fois la FMM ?

Deux ingrédients

- changement d'inconnues \longrightarrow Diagonalisation par bloc de la matrice

$$\begin{Bmatrix} J \\ M \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} J + M \\ J - M \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} J^t & M^t \end{pmatrix} \begin{bmatrix} T & K \\ K & T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} z_{\varepsilon} (J + \varepsilon M, J^t + \varepsilon M^t)$$

$$\begin{aligned} z_{\varepsilon}(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k G(x, y) \left(J(y) \cdot J^t(x) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_{\Gamma} J(y) \operatorname{div}_{\Gamma} J^t(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge J \cdot J^t(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x). \end{aligned}$$

dit l'expression **bleue** de \mathcal{A}

- Utilisation d'une expression équivalente pour \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} \tilde{z}_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) = & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(Id_{3 \times 3} + \frac{1}{\kappa^2} \vec{\nabla}_x \otimes \vec{\nabla}_x \right) G(x, y) \cdot \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}^t(x) d\Gamma(x) d\Gamma(y) \\ & + \varepsilon \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^t(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \end{aligned}$$

“**expression verte**” de \mathcal{A}

En utilisant la **FMM**,

$$\tilde{z}_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) = \frac{ik^2}{16\pi^2} \int_{S^2} T^L(\hat{s}, c_y - c_x) \mathcal{F}_\varepsilon(a_\infty(\mathbf{J})) \cdot \overline{a_\infty(\mathbf{J}^t)} d\sigma(s),$$

avec

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\phi) = \frac{1}{2} ((\hat{s} \wedge \phi \wedge \hat{s}) - i\varepsilon \hat{s} \wedge \phi)$$



et

$$a_{\infty}(\phi, \hat{s}, c) = \int_{\Gamma} \phi(t) e^{-ik(t-c) \cdot \hat{s}} d\Gamma(t).$$

→ **trois** composantes de $\mathcal{F}_{\varepsilon} \mathbf{J}$

● Changement de repère

$$(\hat{s}, \hat{e}_{\theta}, \hat{e}_{\phi}) \rightarrow \left(\hat{s}, u^{+} = \frac{\hat{e}_{\theta} + i\hat{e}_{\phi}}{\sqrt{2}}, u^{-} = \frac{\hat{e}_{\theta} - i\hat{e}_{\phi}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$z_{\varepsilon}(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) = \frac{ik^2}{16\pi^2} \int_{S^2} T^L((a_{\infty} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}^{-\varepsilon})(\bar{a}_{\infty} \mathbf{J}^t \cdot \overline{\mathbf{u}^{-\varepsilon}}) d\sigma(s)$$

→ **deux** composantes seulement comme dans le cas conducteur parfait



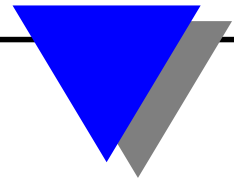
Restent deux difficultés

$$\hat{s} \rightarrow a_\infty \mathbf{J} \approx \sum_{-l \leq m \leq l} A_l^m Y_l^m(\theta, \varphi)$$
$$0 \leq l \leq L(\ell v)$$

→ construction d'un opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_{\ell v+1 \rightarrow \ell v}$

Pour l'algorithme à deux composantes, $(a_\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}^{-\varepsilon})$ dépendent des directions \hat{s}

→ modification de cet opérateur lors du passage à deux composantes



$$z_\varepsilon = \tilde{z}_{\text{varepsilon}}$$

uniquement valable lorsque les fonctions sont à support disjoint

Remarquons que $\int_\Gamma \int_\Gamma \rightarrow \sum_{T, T'} \int_T \int_{T'}$ et

$$\begin{aligned} & \int_T \int_{T'} kG(x, y) \left(\phi_j(y) \cdot \phi_i(x) - \frac{1}{k^2} \mathbf{div}_\Gamma \phi_j(y) \mathbf{div}_\Gamma \phi_i(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) = \\ & \int_T \int_{T'} \left(Id_{3 \times 3} + \frac{1}{k^2} \nabla_x \times \nabla_x \right) kG(x, y) \cdot \phi_j(y) \cdot \phi_i(x) d\Gamma(x) d\Gamma(y) \\ & + R_{i,j}^{T, T'} \text{ terme défini sur la frontière (intégration par parties)} \end{aligned}$$

→ Introduction de ce **terme correcteur** pour les interactions proches.

Calcul de la matrice proche

- but : diminuer le stockage de la matrice proche

$$\Im G(x, y) = \frac{k}{4\pi} \int_{S^2} e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}} e^{ik(c_x-c_y)\cdot\hat{s}} e^{ik(y-c_y)\cdot\hat{s}} d\sigma(\hat{s})$$

→ calculé avec un algorithme multipole

→ reste à calculer $\Re(T + K)_{near}$ et $\Re(T - K)_{near}$

→ stocke la moitié des coefficients (matrice symétriques)

En résumé

	EFIE	CFIE	BGL
	metal	metal	impedant
inconnues	N	N	$2N$
matrice proche	αN	$4\alpha N$	$2\alpha N$
préconditionneur	βN	βN	$4\beta N$



Algorithme

1. calcul des parties réelles de $\Re(T + K)_{near}$ et $\Re(T - K)_{near}$ et stockage sur deux fichiers sur disque (out-of core - précalcul)
2. calcul de $(J + M)$ et $(J - M)$
3. calcul de $\Re(T + K)_{near} (J + M)$ et $\Re(T - K)_{near} (J - M)$
4. calcul multipôle de $(T + K)_{far} (J + M)$ et $(T - K)_{far} (J - M)$
5. calcul multipôle de $\Im(T + K)_{near} (J + M)$ et $\Im(T - K)_{near} (J - M)$
6. calcul du vecteur

$$\begin{bmatrix} TJ + KM \\ KJ + TM \end{bmatrix}$$

7. ajout du terme de masse calcul du vecteur

$$\begin{bmatrix} CJ \\ DM \end{bmatrix}$$



Résultats numériques

Cas du produit matrice-vecteur pour une sphère à 100920 ddl électriques maillée en $\lambda/10$.

Erreurs relatives avec un calcul en direct.

valeur de l'impédance	erreur relative L^1	erreur relative L^2	erreur relative L^∞
$0.34 + i 0.29$	$0.30359 \cdot 10^{-3}$	$0.20788 \cdot 10^{-3}$	$0.13152 \cdot 10^{-3}$
$0.34 - i 0.29$	$0.30359 \cdot 10^{-3}$	$0.20788 \cdot 10^{-3}$	$0.13152 \cdot 10^{-3}$
$1 + i$	$0.30336 \cdot 10^{-3}$	$0.19706 \cdot 10^{-3}$	$0.11707 \cdot 10^{-3}$

- les erreurs sont toujours faibles
- la valeur de l'impédance a peu d'influence sur les erreurs.

Temps de calcul

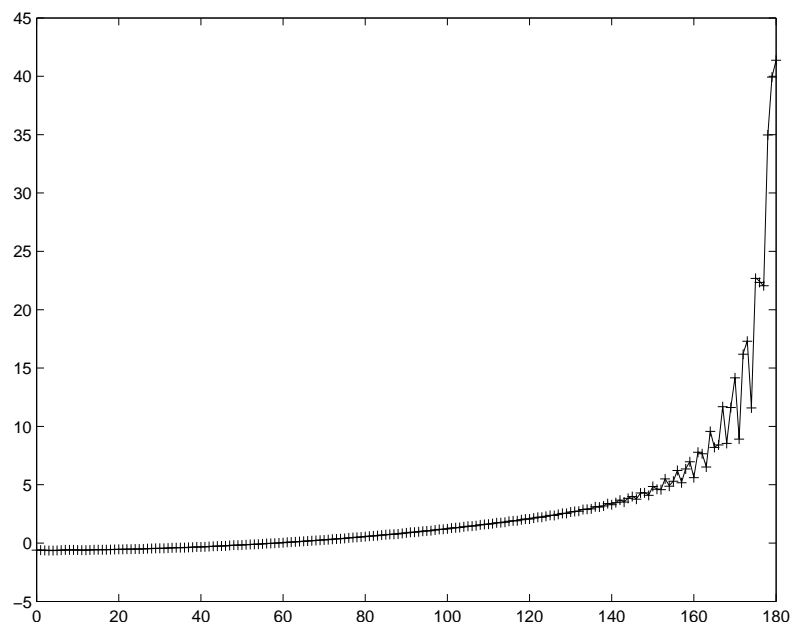
Temps de construction de la matrice proche

Nombre de d.d.l.	Type d'équation	Temps de construction de la matrice proche
201840	IMPE	439.2s
100920	EFIE-2	202s

Temps du produit matrice-vecteur

Nombre de d.d.l.	Type d'équation	Temps de calcul des interactions lointaines	Temps de calcul des interactions proches
201840	IMPE	44.3s	3.2 s
100920	EFIE-2	42.9	1.36s

Test validation



Comparaison with an
analytical solution
Mie R.C.S

sphère de 500000 ddl élec-
triques maillée en $\lambda/10$
impédance constante $\eta =$
 $0.34 + i0.28$
nombre d'itérations 73



Conclusion

Etude du problème de diffraction avec condition d'impédance

Utilisation de la formulation à deux courants **BGL**

- Mise en place d'un calcul multipôle à deux composantes
- Précision bonne
- Temps CPU pour un produit matrice-vecteur identique au cas du conducteur parfait (EFIE)
- Système en général plus facile à résoudre dès qu'il y a de l'impédance.
- Système moins facile à inverser lorsque variations de l'impédance
- Dégénère en EFIE sur les parties métalliques