

Analyse de méthodes éléments finis pour des problèmes couplés Hydro-Mécaniques

Sébastien Meunier^{1,2} Gérald Nicolas¹ Alexandre Ern²

¹EDF R&D

²CERMICS - École Nationale des Ponts et Chaussées

1er juin 2006



Plan

- 1 Étude d'un problème HM stationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème approché
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
 - Implantation dans *Code_Aster*
- 2 Étude d'un problème HM instationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème semi-discrétisé en temps
 - Analyse du problème totalement discrétisé
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
- 3 Perspectives



Objectifs de la thèse

- Analyse de la pertinence du maillage et du pas de temps
- Technique choisie : indicateurs d'erreur *a posteriori* par la méthode des résidus
 - Quantités aisément **calculables** : fonctions de la solution calculée et des données du problème
 - Nourrissent une procédure d'**adaptation** de maillage et du pas de temps
- Étude de modélisations **couplées** (Thermo-Hydro-Mécanique) et **non-linéaires** (Lois de comportement, paramètres phénoménologiques)

Plan

- 1 Étude d'un problème HM stationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème approché
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
 - Implantation dans *Code_Aster*
- 2 Étude d'un problème HM instationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème semi-discrétisé en temps
 - Analyse du problème totalement discrétisé
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
- 3 Perspectives

Équations du problème continu

- Équilibre mécanique + Conservation de la masse

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_{\text{ref}}^0 \mathbf{F}^m = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \end{cases}$$

- Comportement élastique du squelette + Loi de Darcy

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\lambda_1^M (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1} + 2\lambda_2^M \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})}_{\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u})} + \sigma_p \mathbf{1},$$

$$\frac{\mathbf{M}}{\rho} = \lambda^H (-\nabla p + \rho \mathbf{F}^m),$$

où $d\sigma_p = -bdp$.

Conditions aux limites

- Partitions du bord $\Gamma = \Gamma_D^M \cup \Gamma_N^M = \Gamma_D^H \cup \Gamma_N^H$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D^M, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}} & \text{sur } \Gamma_N^M, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D^H, \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M_{\text{nor}} & \text{sur } \Gamma_N^H. \end{array} \right.$$

Dualisation

- Espaces solutions

$$\mathbf{U}^{M,0} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3 / \mathbf{v}|_{\Gamma_D^M} = \mathbf{0}\},$$

$$U^{H,0} = \{q \in H^1(\Omega) / q|_{\Gamma_D^H} = 0\}.$$

- On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } x \in V \text{ tel que} \\ \forall y \in V, \quad a_{HM}(x, y) = b_{HM}(y), \end{cases} \quad (1)$$

où l'on a posé $x = (\mathbf{u}, p)$, $y = (\mathbf{v}, q)$, $V = \mathbf{U}^{M,0} \times U^{H,0}$,

$$a_{HM}(x, y) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) - b \int_{\Omega} \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \lambda^H \nabla p \cdot \nabla q,$$

$$b_{HM}(y) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^M \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N^M} \mathbf{g}^M \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} f^H \cdot q + \int_{\Gamma_N^H} g^H \cdot q,$$

$$\mathbf{f}^M = \rho_{\text{ref}}^0 \mathbf{F}^m, \quad f^H = -\rho \nabla \cdot (\lambda^H \mathbf{F}^m), \quad \mathbf{g}^M = \boldsymbol{\sigma}^{\text{nor}}, \quad g^H = -\frac{M_{\text{nor}}}{\rho} + \rho \lambda^H \mathbf{F}^m \cdot \mathbf{n}.$$

Analyse *a priori* du problème continu

Théorème

Si $\lambda_1^M \geq 0$ sur Ω , s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_2^M \geq \lambda_0$ et $\lambda^H \geq \lambda_0$ sur Ω , le problème (1) est bien posé.

Formulation du problème approché

- Espaces des déplacements et des pressions discrétisés

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{c,h}^k &= \{\mathbf{v}_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^3 / \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in [\mathbf{P}_k]^3\}, \\ \mathbf{U}_{c,h,0}^k &= \mathbf{U}_{c,h}^k \cap \mathbf{U}^{M,0}, \\ P_{c,h}^l &= \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|K} \in \mathbf{P}_l\}, \\ P_{c,h,0}^l &= P_{c,h}^l \cap U^{H,0}. \end{aligned}$$

- On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } x_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall y_h \in V_h, \quad a_{\text{HM}}(x_h, y_h) = b_{\text{HM}}(y_h), \end{cases} \quad (2)$$

où $V_h = \mathbf{U}_{c,h,0}^k \times P_{c,h,0}^l$, $x_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$, $y_h = (\mathbf{v}_h, q_h)$.

- Le problème approché (2) est bien posé.

Optimalité de l'erreur

- Si $\mathbf{u} \in [H^{k+1}(\Omega)]^3$ et $p \in H^{l+1}(\Omega)$,

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_V \lesssim \left(h^k |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega} + h^l |p|_{l+1, \Omega} \right).$$

- Choix $k = l$ judicieux pourvu que \mathbf{u} et p soient suffisamment réguliers.

Fiabilité

$$\forall K \in \mathcal{T}_h,$$

$$\eta_K(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{a}, b) =$$

$$h_K \|\mathbf{f}^M + \nabla_h \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_h) - b \nabla p_h\|_{0,K} + h_K \|f^H + \nabla_h \cdot (\lambda^H \nabla p_h)\|_{0,K}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_K^i} h_F^{\frac{1}{2}} \|[(\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_h) - b \rho_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,F} + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_K^i} h_F^{\frac{1}{2}} \|[(\lambda^H \nabla p_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,F}$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_K^\partial \cap \Gamma_N^M} h_F^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{g}^M - (\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_h) - b \rho_h \mathbf{1}) \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_K^\partial \cap \Gamma_N^H} h_F^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{g}^H - (\lambda^H \nabla p_h) \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}.$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_h\|_V \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{a}, b)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Optimalité

Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on a

$$\eta_K(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{a}, b) \lesssim \sum_{K' \in \Delta_K} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K'} + \|p - p_h\|_{1,K'} + \delta_{K'}(u_h)).$$

δ_K résulte des fluctuations locales de \mathbf{f}^M , f^H , λ_1^M , λ_2^M , λ^H , \mathbf{g}^M , g^H .

▶ δ_K

▶ Δ_K

Un cas test

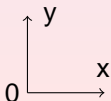
- Problème de consolidation d'un terrain
 - en dimension 2,
 - infiniment long selon (Oy) , de hauteur $L = 5$ mètres selon (Ox) ,
 - soumis à la pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{x}$.
- Géométrie d'une section :

GM2

GM1

GM4

GM3



Conditions limites

- Sur GM3 : $u_y = 0$ et $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$
- Sur GM2 : $u_y = 0$ et $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$
- Sur GM1 : $u_x = u_y = 0$ et $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$
- Sur GM4 : $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ et $p = P_0 = 100000$ Pa

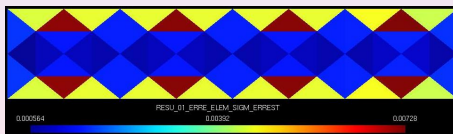
Résultats numériques

Maillage 0



Indice efficacité :
3.97

Maillage 1



Indice efficacité :
3.89

Maillage 2



Indice efficacité :
1.54

Plan

- 1 Étude d'un problème HM stationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème approché
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
 - Implantation dans *Code_Aster*
- 2 Étude d'un problème HM instationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème semi-discretisé en temps
 - Analyse du problème totalement discretisé
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
- 3 Perspectives

Problème HM instationnaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) + b\nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \partial_t \left(\frac{1}{M} p + b\nabla \cdot \mathbf{u} \right) - \kappa \Delta p = g, & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma_D^M \times]0, T[, \\ (\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) - \beta b p \boldsymbol{\chi}_S \mathbf{1}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}, & \text{sur } \Gamma_N^M \times]0, T[, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_D^H \times]0, T[, \\ -b\partial_t ((1 - \beta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\chi}_S + \kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} = \phi_{\text{nor}}, & \text{sur } \Gamma_N^H \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{dans } \Omega, \\ p(\mathbf{x}, 0) = p_0, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

β : proportion de pores fermés sur la frontière $\Gamma_S = \Gamma_N^M \cap \Gamma_N^H$.
 Dans toute la suite, on fait l'hypothèse $\beta = 0$.

Caractère bien posé

- On s'intéresse à des solutions suffisamment régulières en temps
- Article de R. E. Showalter pour théorèmes d'existence et d'unicité plus généraux
R. E. Showalter. "Diffusion in poro-elastic media", *J. Math. Anal. Appl.*, **251**,310–340, (2000).

Dualisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in C^1([0, T], \mathbf{U}^{M,0}) \times C^1([0, T], \mathbf{U}^{H,0}) \text{ tel que } \forall t \in [0, T], \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}^{M,0}, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} b \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N^M} \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}} \cdot \mathbf{v}, \\ \forall q \in \mathbf{U}^{H,0}, \quad \int_{\Omega} \partial_t \left(\frac{1}{M} p + b \nabla \cdot \mathbf{u} \right) q + \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla q - \int_{\Gamma_S} b \partial_t (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) q \\ \quad = \int_{\Omega} g q + \int_{\Gamma_N^H} \phi_{\text{nor}} q, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \quad p(\cdot, 0) = p_0.$$

Quelques définitions

- Énergie mécanique

$$\mathcal{E}_M(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\lambda_1^M (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\lambda_2^M \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})^2 \right).$$

- Puissance hydraulique

$$\mathcal{E}_H(p) = \int_{\Omega} \kappa (\nabla p)^2.$$

- Pour tout $t \in [0, T]$, pour $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p)$,

$$\|\|\|\mathbf{x}\|\|\|(t) = \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}_M(\mathbf{u})(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{M} p^2(\cdot, t) + \int_0^t \mathcal{E}_H(p)(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Notation : $f \lesssim g$ ssi il existe $c > 0$, indépendant de T , tel que $f \leq cg$.

Hypothèses sur les données

- $\mathbf{u}_0 \in [H^1(\Omega)]^3$, $p_0 \in L^2(\Omega)$,
- $\boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}} \in C^1([0, T]; L^2(\Gamma_N^M))$, $\mathbf{f} \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$,
- $\phi_{\text{nor}} \in L^2(]0, T[; L^2(\Gamma_N^H))$, $\mathbf{g} \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$,
- b constant, M borné, $\partial_t \lambda_1^M = \partial_t \lambda_2^M = \partial_t M = 0$.

Théorème de stabilité

Pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2(t) &\lesssim \frac{1}{2} \mathcal{E}_M(\mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{M} p_0^2 + \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2(0) + \|\boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}\|_{0,\Gamma_N^M}^2(0) \\ &\quad + T \int_0^t \|\partial_t \mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2 + T \int_0^t \|\partial_t \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}\|_{0,\Gamma_N^M}^2 \\ &\quad + \int_0^t \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \|\phi_{\text{nor}}\|_{0,\Gamma_N^H}^2. \end{aligned}$$

Notations

- Subdivision $[0, T] = \bigcup_{n=1}^N [t_{n-1}, t_n]$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$.
- Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note $\tau_n = t_n - t_{n-1}$.
- Notation : $f \lesssim g$ ssi il existe $c > 0$, indépendant de T et de la subdivision, tel que $f \leq cg$.
- Subdivision temporelle régulière : il existe $\sigma_1 > 0$ tel que pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\frac{1}{\sigma_1} \leq \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \leq \sigma_1, \quad \text{i.e.} \quad 1 \lesssim \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \lesssim 1.$$

Notations

- Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, pour toute fonction g définie sur $\Omega \times [0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^q , on note

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad g^n = g(\cdot, t_n).$$

- L'indice inférieur τ désigne une fonction définie sur $\Omega \times [0, T]$, **continue et affine par morceaux** en temps. On a

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad g_\tau(x, t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} g_\tau^n(x) + \frac{t_n - t}{\tau_n} g_\tau^{n-1}(x).$$

- Espaces d'approximation

$$\mathbf{U}_\tau^{\mathbf{M},0} = \{ \mathbf{v}_\tau \text{ fonction continue affine en temps} / \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \mathbf{v}_\tau^n \in \mathbf{U}^{\mathbf{M},0} \},$$

$$\mathbf{U}_\tau^{\mathbf{H},0} = \{ q_\tau \text{ fonction continue affine en temps} / \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad q_\tau^n \in \mathbf{U}^{\mathbf{H},0} \}.$$

Dualisation

- Discrétisation par un schéma d'Euler implicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_\tau, p_\tau) \in \mathbf{U}_\tau^{M,0} \times U_\tau^{H,0} \text{ tel que pour tout } n \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \forall \mathbf{v} \in U^{M,0}, \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_\tau^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} b \nabla p_\tau^n \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N^M} \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}^n \cdot \mathbf{v}, \\ \forall \mathbf{q} \in U^{H,0}, \int_{\Omega} \left[\frac{1}{M} \frac{p_\tau^n - p_\tau^{n-1}}{\tau_n} + b \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_\tau^n - \nabla \cdot \mathbf{u}_\tau^{n-1}}{\tau_n} \right] \mathbf{q} + \int_{\Omega} \kappa \nabla p_\tau^n \cdot \nabla \mathbf{q} \\ \quad - \int_{\Gamma_S} b \frac{\mathbf{u}_\tau^n - \mathbf{u}_\tau^{n-1}}{\tau_n} \cdot \mathbf{n} \mathbf{q} = \int_{\Omega} \mathbf{g}^n \mathbf{q} + \int_{\Gamma_N^H} \phi_{\text{nor}}^n \mathbf{q}, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}_\tau^0 = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad p_\tau^0 = p_0.$$

- Problème bien posé

Hypothèses et notations

- Ω polyèdre de \mathbb{R}^3 .
- \mathcal{T}_{nh} maillage de Ω à l'instant t_n .
- Notation : $f \lesssim g$ ssi il existe $c > 0$ tel que $f \leq cg$ où c est indépendant de T , de la subdivision $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ et des $(\mathcal{T}_{nh})_{0 \leq n \leq N, h}$.

Hypothèses et notations

- k degré d'interpolation en déplacements et l degré d'interpolation en pression.
- Espaces d'approximation à l'instant t_n

$$\mathbf{U}_{nh}^{M,0} = \{\mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^3 \cap \mathbf{U}^{M,0} / \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, \mathbf{v}|_K \in [\mathbf{P}_k]^3\},$$
$$U_{nh}^{H,0} = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) \cap U^{H,0} / \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, q|_K \in \mathbf{P}_l\}.$$

- Espaces d'approximation espace-temps

$$\mathbf{U}_{h\tau}^{M,0} = \{\mathbf{v}_{h\tau} \text{ continue affine en temps} / \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathbf{v}_{h\tau}^n \in \mathbf{U}_{nh}^{M,0}\},$$
$$U_{h\tau}^{H,0} = \{q_{h\tau} \text{ continue affine en temps} / \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, q_{h\tau}^n \in U_{nh}^{H,0}\}.$$

Dualisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_{h\tau}, p_{h\tau}) \in \mathbf{U}_{h\tau}^{M,0} \times U_{h\tau}^{H,0} \text{ tel que pour tout } n \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \forall \mathbf{v}_h \in U_{h\tau}^{M,0}, \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_{h\tau}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_h) + \int_{\Omega} b \nabla p_{h\tau}^n \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_N^M} \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}^n \cdot \mathbf{v}_h, \\ \forall q_h \in U_{h\tau}^{H,0}, \int_{\Omega} \left[\frac{1}{M} \frac{p_{h\tau}^n - p_{h\tau}^{n-1}}{\tau_n} + b \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_{h\tau}^n - \nabla \cdot \mathbf{u}_{h\tau}^{n-1}}{\tau_n} \right] q_h + \int_{\Omega} \kappa \nabla p_{h\tau}^n \cdot \nabla q_h \\ - \int_{\Gamma_S} b \frac{\mathbf{u}_{h\tau}^n - \mathbf{u}_{h\tau}^{n-1}}{\tau_n} \cdot \mathbf{n} q_h = \int_{\Omega} g^n q_h + \int_{\Gamma_N^H} \phi_{\text{nor}}^n q_h, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}_{h\tau}^0 = \Pi_h^M \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad p_{h\tau}^0 = \Pi_h^H p_0,$$

- Problème bien posé

Bibliographie

Analyse d'erreur *a posteriori* de problèmes paraboliques

- C. Johnson, Y.- Y. Nie et V. Thomée, “An a posteriori error estimate and adaptive timestep control for a backward Euler discretization of a parabolic problem”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **27**, 277–291, (1990). **Adaptation en temps.**
- M. Picasso, “Adaptive finite elements for a linear parabolic problem”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **167**, 223–237, (1998). **Analyse “espace-temps”.**
- R. Verfürth, “Robust a posteriori error estimates for non-stationary convection-diffusion equations”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **43**, 1783–1802, (2005). **a.d.r. en régime d'advection dominante.**
- A. Bergam, C. Bernardi, et Z. Mghazli, “A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations”, *Math. Comp.*, **74**, 1117–1138, (2005). **Indicateurs “espace-temps” découplés, fiabilité, optimalité.**

Analyse d'erreur *a posteriori*

Objectif

- Estimer $|||x - x_{h\tau}|||(t_n)$ en fonction de quantités accessibles au calcul.
- Extension des travaux de BBM05 au cas d'un problème mixte elliptique-parabolique comme le problème HM instationnaire.

Remarques

- Les espaces $\mathbf{U}_{h\tau}^{M,0}$ sont *a priori* indépendants entre eux. Idem pour les espaces $\mathbf{U}_{h\tau}^{H,0}$.
- Pas de relation entre pas d'espace et pas de temps.

Famille d'indicateurs d'erreur

Indicateurs d'erreur en temps

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \eta_n = \left(\frac{\tau_n}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \kappa^{\frac{1}{2}} \nabla \left(p_{h\tau}^n - p_{h\tau}^{n-1} \right) \right\|_{0,\Omega}.$$

Famille d'indicateurs en espace

Approximation des données par des polynômes

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_{n,K}^M &= h_K \left\| \mathbf{f}_{1h}^n + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_{h\tau}^n) - b \nabla p_{h\tau}^n \right\|_{0,K} + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_K^i} h_F^{\frac{1}{2}} \left\| \llbracket \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_{h\tau}^n) \cdot \mathbf{n} \rrbracket \right\|_{0,F} \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_K^{\partial} \cap \Gamma_N^M} h_F^{\frac{1}{2}} \left\| \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor},2h}^n - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}_{h\tau}^n) \right\|_{0,F}, \\ \widehat{\eta}_{n,K}^H &= h_K \left\| \mathbf{g}_{3h}^n - \frac{1}{M} \frac{p_{h\tau}^n - p_{h\tau}^{n-1}}{\tau_n} - b \frac{\nabla \cdot (\mathbf{u}_{h\tau}^n - \mathbf{u}_{h\tau}^{n-1})}{\tau_n} + \kappa \Delta p_{h\tau}^n \right\|_{0,K} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_K^i} h_F^{\frac{1}{2}} \left\| \llbracket \kappa \nabla p_{h\tau}^n \cdot \mathbf{n} \rrbracket \right\|_{0,F} \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_K^{\partial} \cap \Gamma_N^H} h_F^{\frac{1}{2}} \left\| \phi_{\text{nor},4h}^n - \kappa \nabla p_{h\tau}^n \cdot \mathbf{n} + b \frac{\mathbf{u}_{h\tau}^n - \mathbf{u}_{h\tau}^{n-1}}{\tau_n} \cdot \mathbf{n} \chi_S \right\|_{0,F}. \end{aligned}$$

Fiabilité de la famille

Théorème

Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a

$$\|x - x_{h\tau}\|^2(t_n) \lesssim \sum_{m=1}^n \left(\eta_m^2 + \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} (\hat{\eta}_{m,K}^H)^2 \right) + \sum_{m=1}^n \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} (\hat{\eta}_{m,K}^M)^2 + \delta_M^2 + \delta_H^2.$$

▶ δ_M, δ_H

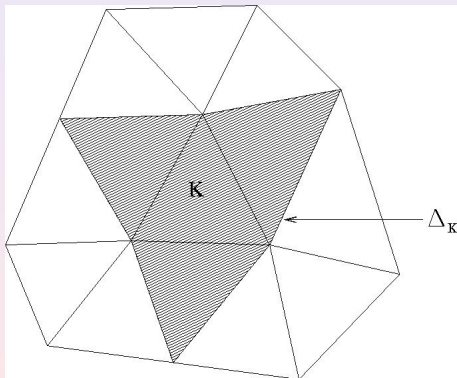
Plan

- 1 Étude d'un problème HM stationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème approché
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
 - Implantation dans *Code_Aster*
- 2 Étude d'un problème HM instationnaire
 - Analyse du problème continu
 - Analyse du problème semi-discrétisé en temps
 - Analyse du problème totalement discrétisé
 - Analyse d'erreur *a posteriori*
- 3 Perspectives

Perspectives

- Analyse de l'optimalité des indicateurs d'erreur pour le problème HM instationnaire
- Traiter incompatibilité CI/CL : singularités à $t = 0^+$
- Analyse *a posteriori* pour les problèmes THM (non-linéarités)

Macro-élément Δ_K



Expression de δ_K

$$\begin{aligned}
 \delta_K(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h) &= h_K \|\mathbf{f}^M - \Pi'_h \mathbf{f}^M\|_{0,K} + h_K \|\mathbf{f}^H - \Pi'_h \mathbf{f}^H\|_{0,K} \\
 &+ h_K \left\| -\nabla_{h \cdot} \left((\lambda_1^M - \Pi'_h \lambda_1^M)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h) \mathbf{1} + (\lambda_2^M - \Pi'_h \lambda_2^M)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h + \nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h^t) \right) \right\|_{0,K} \\
 &+ h_K \left\| -\nabla_{h \cdot} \left((\lambda^H - \Pi'_h \lambda^H) \nabla_{h \cdot} \mathbf{p}_h \right) \right\|_{0,K} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_K^i} h_F^{\frac{1}{2}} \left(\left\| [(\lambda^H - \Pi'_h \lambda^H)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{n}] \right\|_{0,F} \right. \\
 &+ \left. \left\| [(\lambda_1^M - \Pi'_h \lambda_1^M)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + (\lambda_2^M - \Pi'_h \lambda_2^M)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h + \nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h^t) \cdot \mathbf{n}] \right\|_{0,F} \right) \\
 &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_K^N} \left(h_F^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{g}^M - \Pi'_h \mathbf{g}^M\|_{0,F} + h_F^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{g}^H - \Pi'_h \mathbf{g}^H\|_{0,F} \right. \\
 &+ h_F^{\frac{1}{2}} \|(\lambda^H - \Pi'_h \lambda^H)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{0,F} \\
 &+ \left. h_F^{\frac{1}{2}} \|(\lambda_1^M - \Pi'_h \lambda_1^M)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + (\lambda_2^M - \Pi'_h \lambda_2^M)(\nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h + \nabla_{h \cdot} \mathbf{u}_h^t) \cdot \mathbf{n}\|_{0,F} \right).
 \end{aligned}$$

Fiabilité de la famille

Erreurs sur les données

$$\begin{aligned}
 \delta_M^2 &= T \left(\left\| \partial_t (\mathbf{f} - \Pi_\tau^1 \mathbf{f}) \right\|_{L^2(0, t_n, L^2(\Omega))}^2 + \left\| \partial_t (\boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}} - \Pi_\tau^1 \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}) \right\|_{L^2(0, t_n, L^2(\Gamma_N^M))}^2 \right) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^n \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \left(h_K^2 \left\| \mathbf{f}^m - \mathbf{f}_{1h}^m \right\|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_K^\partial \cap \Gamma_N^M} h_F \left\| \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}}^m - \boldsymbol{\sigma}_{\text{nor}, 1/2h}^m \right\|_{0,F}^2 \right) \\
 &\quad + \mathcal{E}_M (\mathbf{u}_\tau^0 - \Pi_h^M \mathbf{u}_0), \\
 \delta_H^2 &= \left\| \mathbf{g} - \Pi_\tau^0 \mathbf{g} \right\|_{L^2(0, t_n, L^2(\Omega))}^2 + \left\| \phi_{\text{nor}} - \Pi_\tau^0 \phi_{\text{nor}} \right\|_{L^2(0, t_n, L^2(\Gamma_N^H))}^2 \\
 &\quad + \sum_{m=1}^n \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \left(h_K^2 \left\| \mathbf{g}^m - \mathbf{g}_{1/3h}^m \right\|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_K^\partial \cap \Gamma_N^H} h_F \left\| \phi_{\text{nor}}^m - \phi_{\text{nor}, 1/4h}^m \right\|_{0,F}^2 \right) \\
 &\quad + \left\| \mathbf{p}_\tau^0 - \Pi_h^H \mathbf{p}_0 \right\|_{0,\Omega}^2.
 \end{aligned}$$