Sur un modèle issu de la diffusion des populations

Sorin MARDARE
Université de Zürich
sorin.mardare@math.unizh.ch

PLAN :	1. Modélisation 2. Exemples 3. Résultats d'existence et unicité 4. Analyse spectrale et asymptotique

Modélisation

Le domain occupé par une population	:	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$
La densité de la population au point $x \in \Omega$	:	$u(x)$
L'extérieur de Ω est hostile à la vie	:	$u = 0$ sur $\partial\Omega$

En régime stabilisé, la diffusion de la population obéit à la loi de Fourrier :

$$\vec{v}(x) = -A\nabla u(x),$$

où

$\vec{v}$ est la vitesse de diffusion,

A est un champ de matrices inhérent à la population.

▶ Lorsque $\vec{v}(x)$ est influencé par la densité de population en un autre point $\varphi(x)$, l'on obtient le modèle stationnaire :

$$-\mathrm{div}(A(x, u \circ \varphi(x))\nabla u(x)) + \lambda(x)u(x) = f(x)$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est un terme source (dû par ex. à la naissance).

■ M. Chipot, Arch. Rational Mech. Anal, 2000.

▶ Lorsque la mortalité en x est le rapport entre la densité de la population en un autre point $\varphi(x)$ et celle en x, l'on obtient le modèle :

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + u \circ \varphi(x) = f(x)$$

■ Objectif de cet exposé : étude de ce dernier modèle.

Modèle simplifié :

$$-\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Remarque : Le modèle dépend fortement de l'application $\varphi : \Omega \to \Omega$.

Exemples :

- $\varphi(x) = x_0 \quad \forall x \in \Omega$

  Existence et unicité de la solution.

- $\varphi(x) = \begin{cases} x_0 & \forall x \in \omega, \\ x_1 & \forall x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$

  $\Omega = (0, 10)$, $\omega = (0, 2]$, $x_1 = 2$, $4x_0^2 - 49x_0 + 127 = 0$

  Aucune solution ou infinité de solutions (en fonction de f).

- $\varphi(x) = -x, \; \forall x \in \Omega := (-\pi, \pi)$

  Aucune solution ou infinité de solutions (en fonction de f).

Modèle : $\begin{cases} -\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$

Dans quel espace résoudre ce problème ?

Remarque : $u \in H_0^1(\Omega)$ n'est pas toujours le "bon" espace.

Exemple : $\varphi(x) = x_0 \ \forall x \in \Omega \ \Rightarrow \ u \circ \varphi$ n'est pas défini

Deux cas sont à distinguer en fonction de φ

(I) φ est mesurable (seulement).

$u \circ \varphi$ bien défini $\Longleftarrow$ solution u continue $\Longleftarrow$ f et Ω suffisamment réguliers :

$$f \in W^{-1,p}(\Omega), \ p > \max(2, \dim\Omega),$$

Ω satisfait la condition du cône extérieur uniforme

Modèle : $\begin{cases} -\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$

(II) φ est régulière et "presque injective".

Plus precisément, on suppose : φ localement Lipschitzienne,

$$\#\{\varphi^{-1}(y)\} \leq N \quad \text{p.p.} \quad y \in \Omega,$$
$$|J\varphi(x)| \geq \alpha > 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Cela permet de définir correctement $u \circ \varphi$ lorsque $u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_A |J\varphi(x)|dx = \int_{\varphi(A)} \#\{A \cap \varphi^{-1}(y)\}dy$$
$$\Rightarrow \; |\varphi^{-1}(E)| = 0 \quad \forall\, |E| = 0 \;\Leftrightarrow\; u \circ \varphi \text{ bien défini } \forall\, u \in L^2(\Omega).$$

On peut donc chercher la solution dans $H_0^1(\Omega)$. Il suffit dans ce cas de prendre $f \in H^{-1}(\Omega)$. Aucune hypothèse de régularité sur Ω.

Approche fonctionnelle

$$-\Delta u + u \circ \varphi = f \;\Leftrightarrow\; -u + \Delta^{-1}(u \circ \varphi) = \Delta^{-1} f$$

$$\Leftrightarrow\; u - Tu = -\Delta^{-1} f \text{ où } T : v \to \Delta^{-1}(v \circ \varphi).$$

Lorsque φ est seulement mesurable, on veut résoudre

$$-\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$

Cela revient à résoudre, dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$u - Tu = -\Delta^{-1}(f).$$

Alternative de Fredholm : T est-il compact de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$?

$\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \ni v \mapsto v \circ \varphi \in L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ opérateur continu,

$L^q(\Omega) \ni v \circ \varphi \mapsto u := \Delta^{-1}(v \circ \varphi) \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ continu (régularité elliptique),

$\mathcal{C}^\alpha(\Omega) \ni u \mapsto u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ compact (Arzela-Ascoli).

Modèle : $\begin{cases} -\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$

Notation : $\Delta^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.

Condition nécessaire et suffisante d'existence :

■ Dans le cas où φ est seulement mesurable :

$$\exists u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \;\Leftrightarrow\; \Delta^{-1} f \perp \ker(I - T^*)$$

où $T : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $T(v) = \Delta^{-1}(v \circ \varphi)$.

■ Dans le cas où φ est régulière et "presque injective" :

$$\exists u \in H_0^1(\Omega) \;\Leftrightarrow\; f \perp \Delta^{-1}(\ker(I - T^*))$$

où $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $T(v) = \Delta^{-1}(v \circ \varphi)$.

Modèle : $\begin{cases} -\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$

Résultats d'existence et unicité

(I) Dans le cas où φ est seulement mesurable :

- $|\Omega| < \delta$ (petit) $\Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

- $\displaystyle\int_\Omega \{\mathrm{dist}(\varphi(x), \partial\Omega)\}^{\alpha q} dx < \varepsilon$ $\Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$

- $\displaystyle\int_\Omega |\varphi(x) - x|^{\alpha q} dx < \varepsilon$ $\Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$

Preuve : $u \circ \varphi \approx 0$ (pour le deuxième),
$u \circ \varphi \approx u$ (pour le troisième)

Résultat d'existence et unicité lorsque $|\Omega| < \delta$

Lorsque φ est seulement mesurable, on souhaite résoudre

$$-\Delta u + u \circ \varphi = f \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Problème de point fixe équivalent : $\exists!\ u \in \mathcal{C}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que

$$u = F(u) := \Delta^{-1}(-f + u \circ \varphi).$$

Régularité de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $\Delta u = f$:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n)|\Omega|^{2/n}\|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

où $n := \dim\Omega$. Par conséquent,

$$\|\Delta^{-1}(w \circ \varphi)\|_{L^\infty} \leq C(n)|\Omega|^{2/n}\|w \circ \varphi\|_{L^\infty} \leq C(n)|\Omega|^{2/n}\|w\|_{L^\infty}$$

$$\Rightarrow \|F(u) - F(v)\|_{L^\infty} = \|\Delta^{-1}((u - v) \circ \varphi)\|_{L^\infty} \leq C(n)|\Omega|^{2/n}\|u - v\|_{L^\infty}$$

Conclusion : Si $C(n)|\Omega|^{2/n} < 1$, alors F est une contraction.

Résultats d'existence et unicité (suite)

(II) Dans le cas où φ est régulière $(\#\{\varphi^{-1}(y)\} \leq N,\ |J\varphi(x)| \geq \alpha)$

- $$C_P(\Omega) := \sup_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}} < \left(\frac{\alpha}{N}\right)^{1/4} \quad \Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(\Omega)$$

- $$\left.\begin{array}{l} (\varphi - \mathrm{id}) \text{ contraction} \\ \|\varphi - \mathrm{id}\|_{L^\infty}(1 - \|\nabla(\varphi - \mathrm{id})\|_{L^\infty})^{-n/2} < 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(\Omega)$$

- $$\left.\begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (a,b) \\ \varphi(x) = x + \gamma(x)\boldsymbol{\vec{e}_n},\ \|\gamma\|_{L^\infty} < \dfrac{4}{b-a} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(\Omega)$$

Comportement asymptotique lorsque la diffusion est petite :

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon \circ \varphi = f \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$u^\varepsilon \approx f \circ \varphi^{-1}$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (on suppose φ injective) ?

■ Le problème ci-dessus est bien posé sauf eventuellement pour un ensemble dénombrable $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\varepsilon_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$. En effet, l'équation ci-dessus s'écrit

$$(\varepsilon I - T)u_\varepsilon = \Delta^{-1}(-f),$$

où $T(v) = \Delta^{-1}(v \circ \varphi)$ est un opérateur compact de $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ (sous certaines hypothèses).

■ Même lorsque $\varepsilon \notin \{\varepsilon_k\}$, on peut construire des exemples ($\varphi(x) = -x$, $f(x) = x^2 \sin x$ dans $\Omega = (-\pi, \pi)$) tels que

$$u_\varepsilon \not\rightharpoonup f \circ \varphi^{-1} \text{ faiblement in } H^{-1}(\Omega).$$

Conclusions et perspectives

• Le modèle de diffusion de populations proposé est approprié dans l'un des cas suivants :
– le domaine est petit.
– le taux de mortalité en x dépend de la densité de la population en $\varphi(x)$, avec φ "proche" de l'identité.
– le taux de mortalité en x dépend de la densité de la population $\varphi(x)$, proche de la frontière.

• L'équation de diffusion ne peut être remplacée par une équation algébrique, même lorsque la diffusion est très petite.

▷ Resoudre le problème sous la contrainte : $u \geq 0$ dans Ω
▷ Étudier le modèle :

$$-\mathrm{div}(A(x, u \circ \psi(x))\nabla u(x)) + \lambda(x, u \circ \varphi(x))u(x) = f(x)$$