

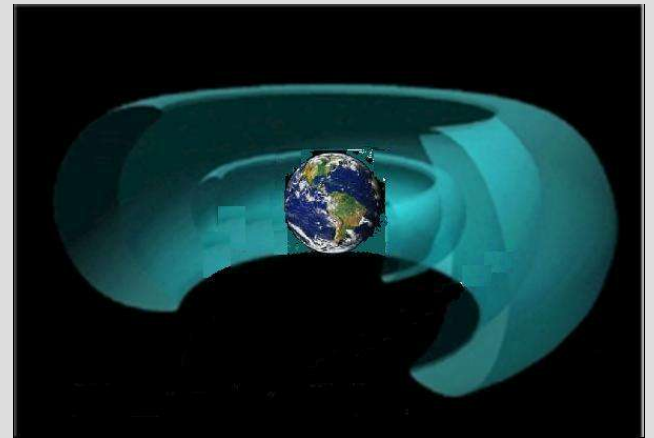
Méthodes numériques pour la résolution des équations de Vlasov-Maxwell adaptées à l'étude de la magnétosphère

Solène LE BOURDIEC^{1,2}

Florian DE VUYST¹

Laurent JACQUET²

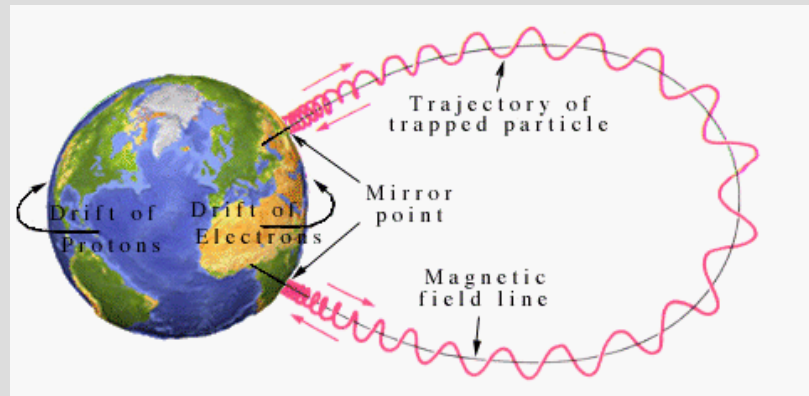
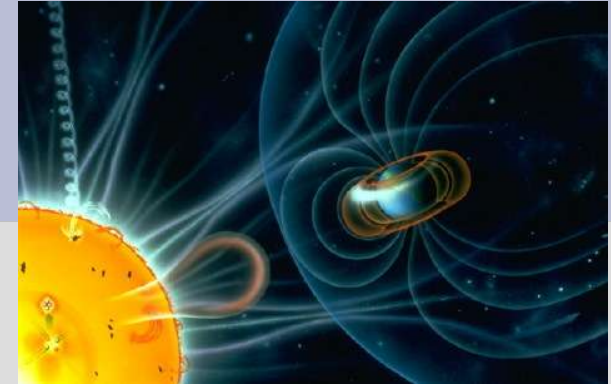
CANUM 2006 – Guidel – 30 mai 06



- Les ceintures de Van Allen (1958)

Régions de confinement de particules chargées

(plasma froid + électrons énergétiques)



- Etude à réaliser et objectifs

Etude de la dynamique CVA

Emission d'ondes whistlers

+

Interaction avec les électrons énergétiques

But : Calcul des densités et flux d'électrons piégés

Prévoir la fiabilité des satellites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}) \nabla_{\mathbf{p}} \cdot f = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \text{rot} \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \\ \text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = q \int f d\mathbf{v} \\ \mathbf{j} = q \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + p^2}}$$

➤ Le modèle : Vlasov-Maxwell relativiste

- Couplage multi-physique fortement non linéaire
- Apparition de structures à petites échelles en vitesse
(*filamentation*)
- Problème 7D ! ($f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$)

➤ Choix d'une approche spectrale de type collocation

AVANTAGES :

- * Petit nombre de degrés de liberté
- * Facteur d'échelle
- * Performance (Matrice diagonale)
- * Extension 'directe' en 3D vitesse
- * Extension 'directe' en relativiste

DESCRIPTION DE L'APPROCHE PSEUDO SPECTRALE (SCM)

ξ_k / α : **points de collocation** = zéros du polynôme de Hermite de degré $N+1 / \alpha$

ω_k : **poinds de quadrature** définis par :

$$\omega_k = \frac{e^{-\xi_k^2}}{\sum_{j=0}^N \left[\bar{H}_j \left(\frac{\xi_k}{\alpha} \right) \right]^2}$$

* Interpolée de la fonction de distribution :

$$f(x, v, t) \approx f^N(x, v, t) = \sum_{k=0}^N a_k(x, t) \bar{H}_k(v)$$

$$\bar{H}_n(v) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\alpha v) e^{-\frac{\alpha^2 v^2}{2}}$$

Facteur d'échelle

Polynôme de Hermite

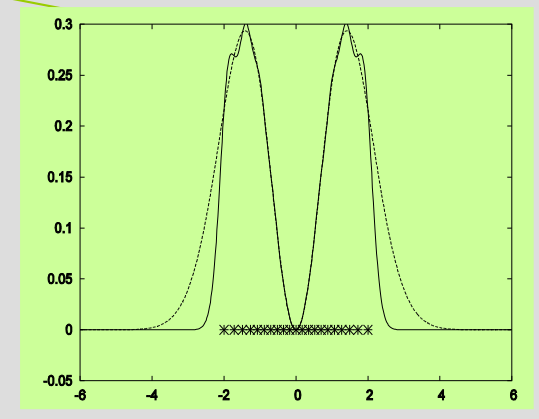
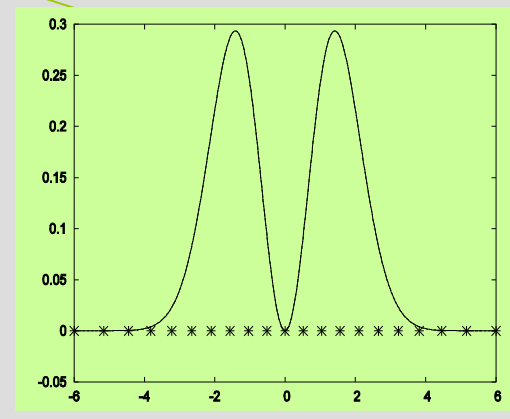
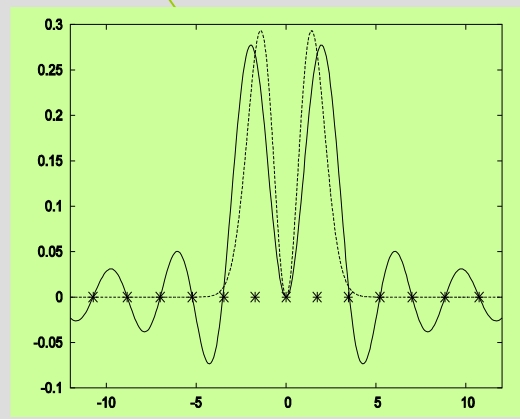
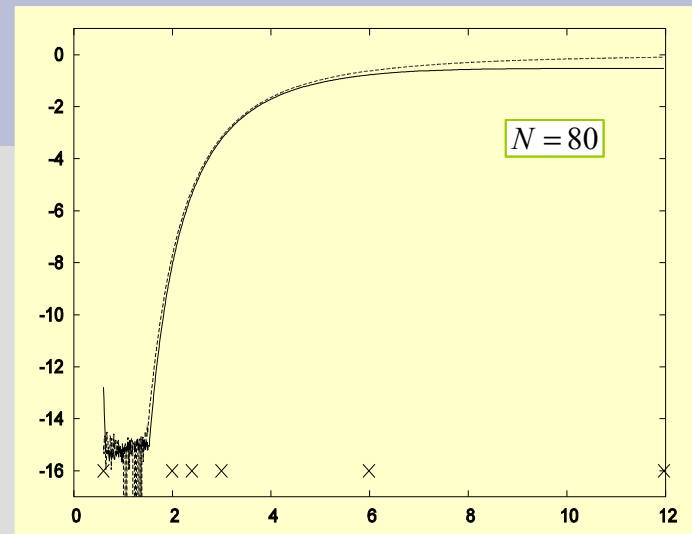
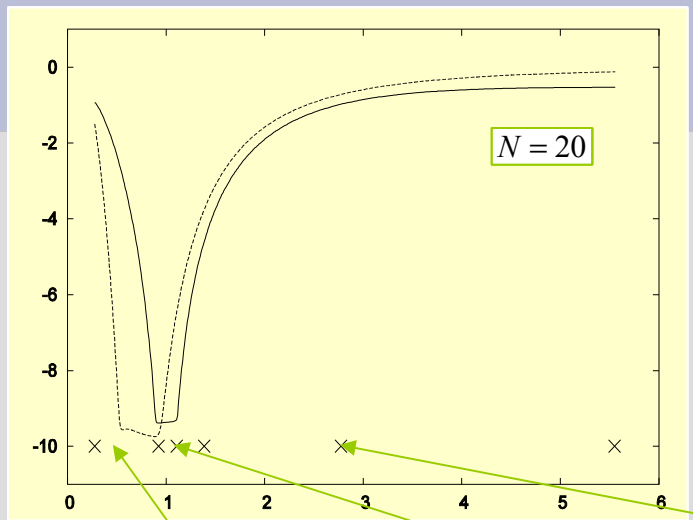
$$a_k(x, t) = \sum_j f \left(x, \frac{\xi_j}{\alpha}, t \right) \bar{H} \left(\frac{\xi_j}{\alpha} \right) \omega_j$$

* Quadrature de Gauss Hermite pour le calcul de ρ et j :

$$\rho = \int f dv \approx \sum_{k=0}^N f \left(\frac{\xi_k}{\alpha} \right) \omega_k$$

CHOIX DU FACTEUR D'ECHELLE

$$f^0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^2 e^{-v^2/2}$$



(Tang- 93) Bon choix de α : $\alpha = \frac{\xi_N}{K}$, $K=6$.

APPLICATION : VLASOV-POISSON 1D_x-1D_v

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f + v \frac{\partial}{\partial x} f + E(x,t) \frac{\partial}{\partial v} f = 0 \\ E(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t) \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,t) = \rho(x,t) - 1 \end{cases}$$

$$x \in [0, L], v \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$\rho(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f dv$$

+ CL périodiques
+ CI $f^0(x,v)$



$$\partial_t F + A \partial_x F + E(x,t) D F = 0$$

Système de N+1 EDP

$$F(x,t) = \begin{pmatrix} f\left(x, \frac{\xi_0}{\alpha}, t\right) \\ \vdots \\ f\left(x, \frac{\xi_N}{\alpha}, t\right) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & \xi_k / \alpha & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{C_j} \bar{H}_k \left(\frac{\xi_j}{\alpha} \right) \bar{H}_k' \left(\frac{\xi_i}{\alpha} \right)$$

DISCRETISATION EN TEMPS

$$\partial_t F + A \partial_x F + B_{E(F)} F = 0$$

On définit 2 opérateurs :

transport

$$\tau(t) = \partial_t + A \partial_x$$

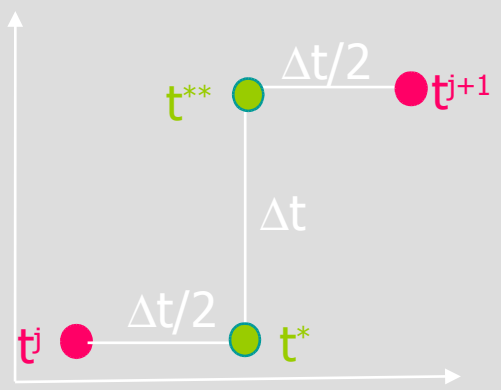
échange spectral

$$\varepsilon_{\bar{E}}(t) = \partial_t + B_{\bar{E}}$$

- Schéma de Strang (ordre 2):
(time splitting)



$$\frac{d\bar{E}}{dx} = f_0 - 1 \quad \text{Poisson stationnaire}$$

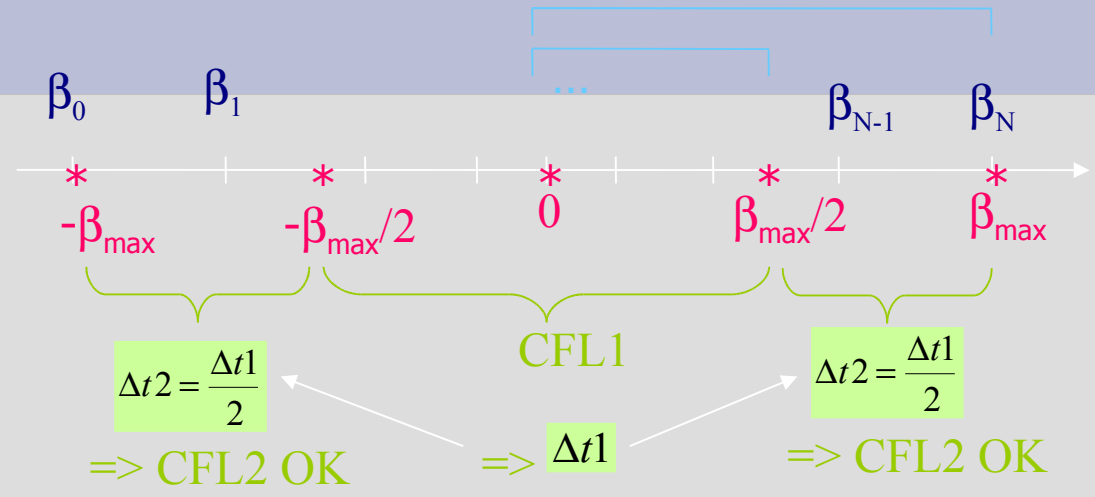


$$F^{j+1} \approx \tau(\Delta t/2) \varepsilon_{\bar{E}}(\Delta t) \tau(\Delta t/2) F^j$$

STRATEGIE DE PAS DE TEMPS HIERARCHIQUES
(subcycling)

$$\beta_k = \xi_k / \alpha$$

points de collocation
=
vitesses de convection



$$\text{CFL1: } \frac{\beta_{\max}}{2} \frac{\Delta t1}{\Delta x} \leq 1$$

$$\text{CFL2: } \beta_{\max} \frac{\Delta t2}{\Delta x} \leq 1$$

$$f_k^{j+1} \approx \tau \left(\frac{\Delta t2}{2} \right) \epsilon_{\bar{E}} (\Delta t2) \tau \left(\frac{\Delta t2}{2} \right) f_k^j, \quad k \text{ tq } \beta_k \in \left[-\frac{\beta_{\max}}{2}, \frac{\beta_{\max}}{2} \right]$$

2 étapes de transport (Rmq : peu coûteux)

$$f_k^{j+1} \approx \tau \left(\frac{\Delta t2}{2} \right) \tau \left(\frac{\Delta t2}{2} \right) \epsilon_{\bar{E}} (\Delta t1) \tau \left(\frac{\Delta t2}{2} \right) \tau \left(\frac{\Delta t2}{2} \right) f_k^j, \quad k \text{ tq } \xi_k \in \left[-\beta_{\max}, -\frac{\beta_{\max}}{2} \right] \cup \left[\frac{\beta_{\max}}{2}, \beta_{\max} \right]$$

⇒ Boucle en temps avec des pas de temps 2 fois plus grands !

DISCRETISATION SPATIALE

- Etape transport : Méthode de Galerkin discontinu :
Mangeney (J. Comp. Phys. – 2002)

$$\partial_t f + \alpha \partial_x f = 0, \quad x \in I$$

Projection sur un espace de fonctions polynomiales par morceaux

Fonctions de base :

$$\phi_{il}(x) = H_i(x) P_l \left(\frac{2(x - x_i)}{\Delta x} \right)$$

Polynômes de Legendre

Condition de stabilité (CFL)

$$|\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Méthode d'ordre 3 en espace

EXTENSION AU PROBLEME RELATIVISTE 1Dx-3Dv

* Vlasov relativiste : $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{p})\nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{v}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B})\nabla_p f = 0$

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\gamma(p)} \\ \gamma(p) = \sqrt{1 + p^2} \end{cases}$$

* Maxwell : Schéma de Yee (ordre 2)

$$f^N(x, p_x, p_y, p_z, t) = \sum_{klm} a_{klm}(x, t) \bar{H}_k(p_x) \bar{H}_l(p_y) \bar{H}_m(p_z)$$

avec $a_{klm}(x, t) = \sum_{hij} f\left(x, \frac{\xi_h}{\alpha}, \frac{\xi_i}{\alpha}, \frac{\xi_j}{\alpha}, t\right) \bar{H}_k\left(\frac{\xi_h}{\alpha}\right) \bar{H}_l\left(\frac{\xi_i}{\alpha}\right) \bar{H}_m\left(\frac{\xi_j}{\alpha}\right) \omega_h \omega_i \omega_j$

$$\partial_t F + A \partial_x F + B_{E(F)} F = 0$$

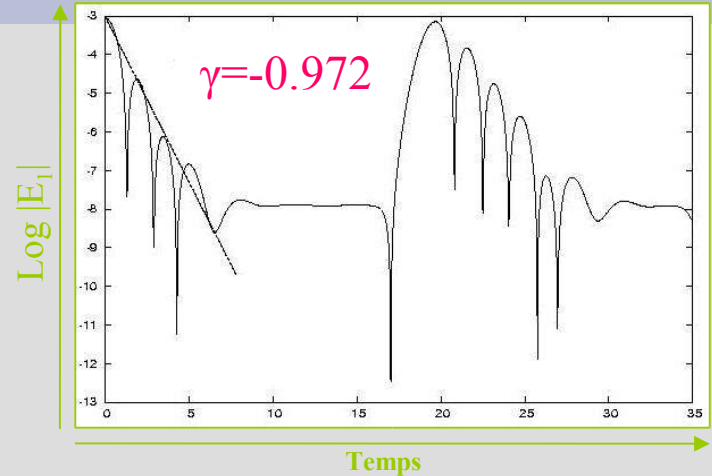
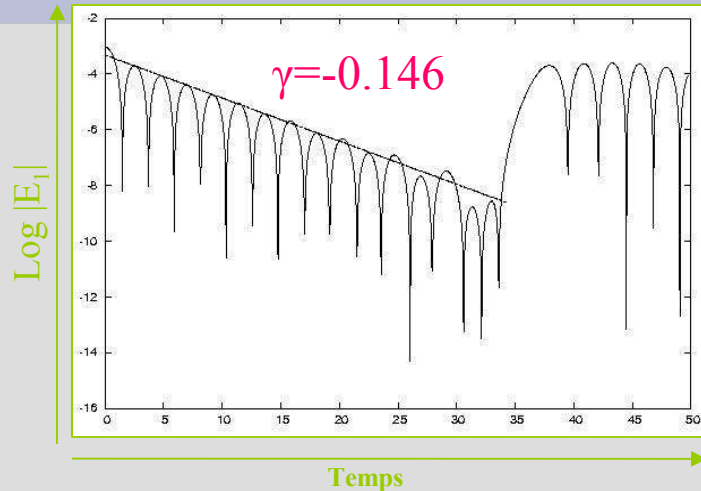
$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & (0) \\ & \xi_k & & \\ & / & \sqrt{1 + |\xi_{klm}|^2} & \\ (0) & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$B_{E(F)}$ contient les éléments de la matrices 1D

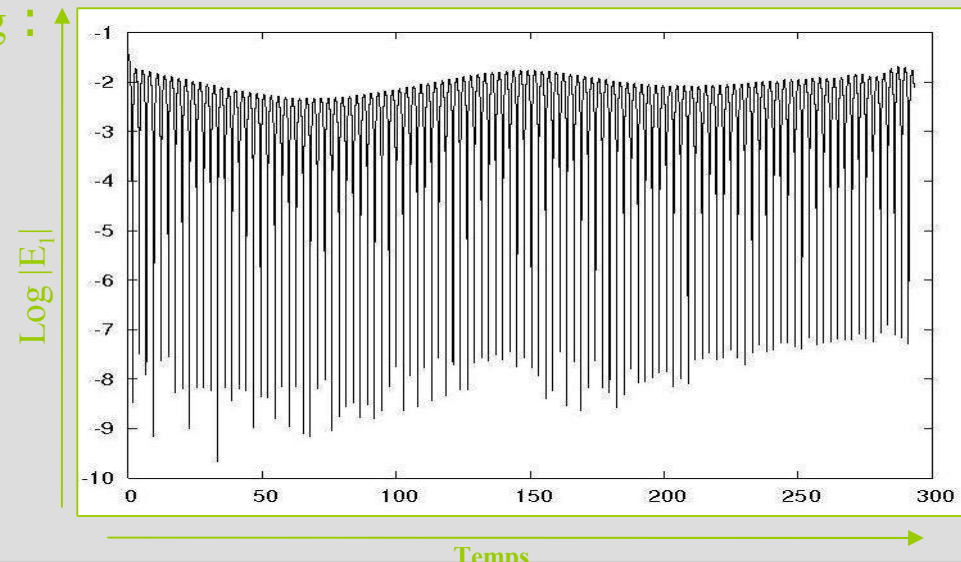
L'EFFET LANDAU LINEAIRE

$x \in [-2\pi, 2\pi]$
 $a = 0,01$
 $N = 100, I = 120$

• CI: $f(x, v, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} (1 + a \cos(kx))$



Temps long :



CI : $f(x, v, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} (1 + a \cos(kx))$

$a=0.01, k=0.5$
 $x \in [0, 4\pi]$

SCM

$N=80, I=50, \alpha=0.7$

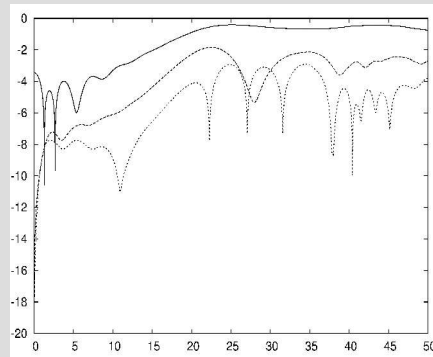
Nakamura & Yabe

(Comput. Phys. Comm. – 1999)

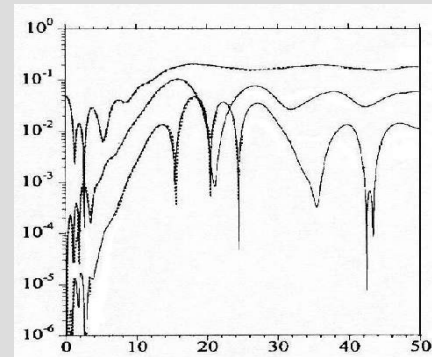
PIC

(128 particules/maille)

Modes de Fourier
du champ E

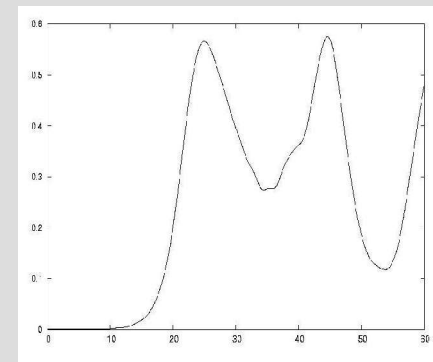


Temps

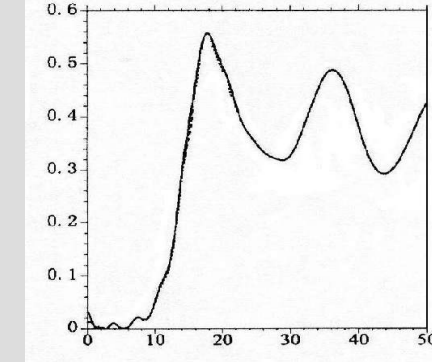


Temps

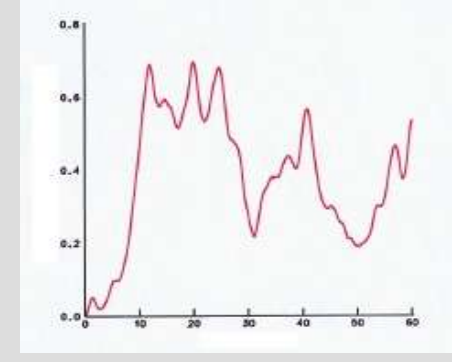
Energie électrique
totale



Temps

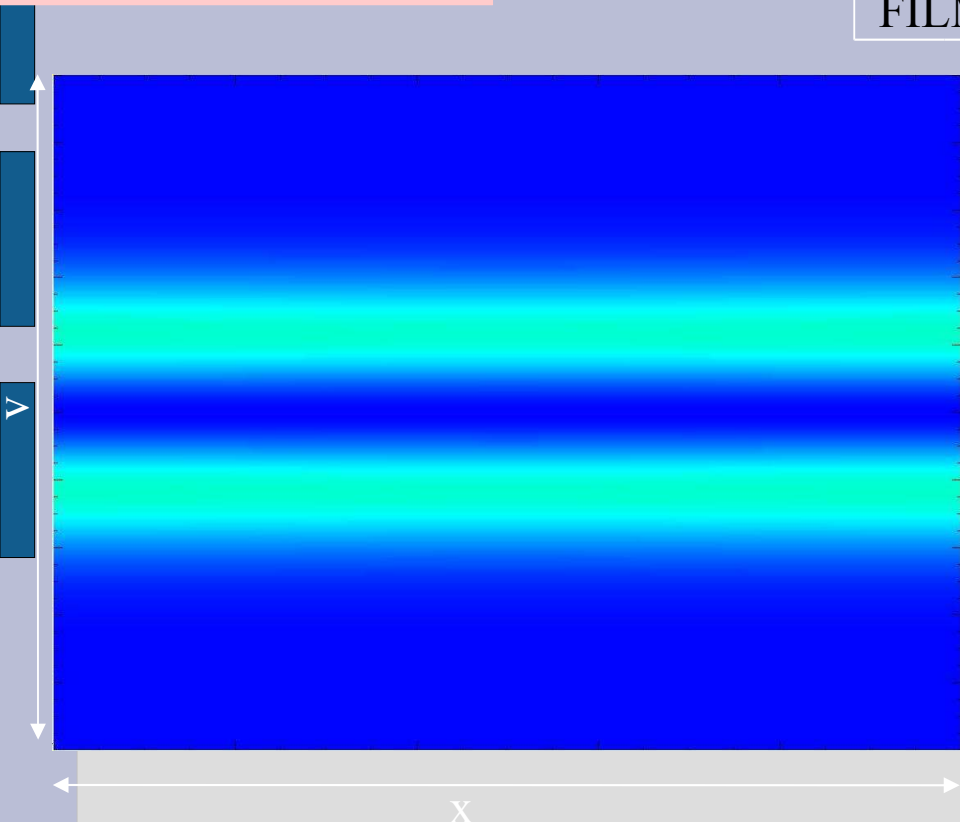


Temps



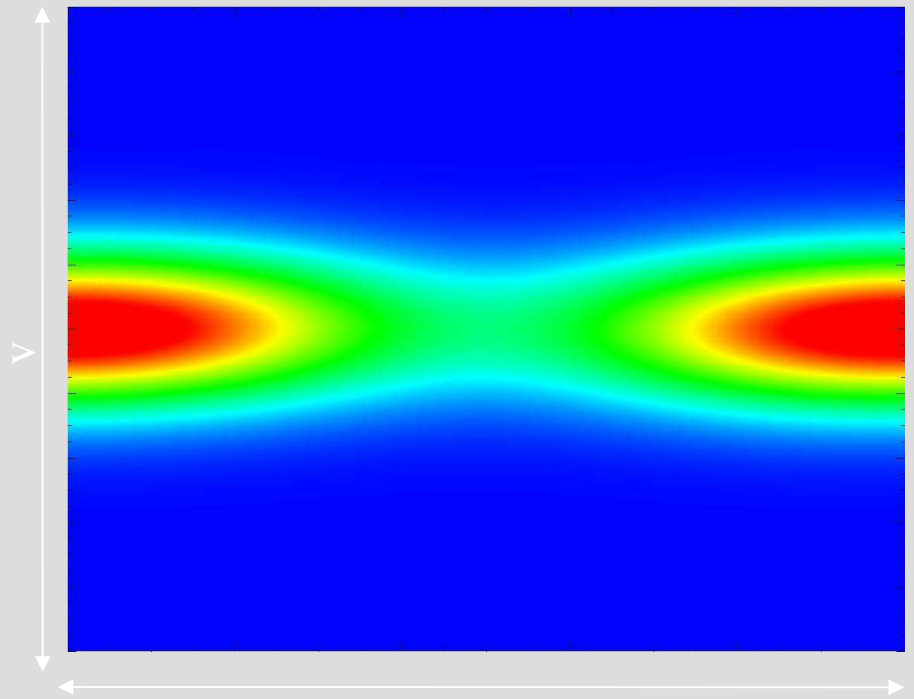
Temps

FILMS



← Instabilité two-stream

Strong Landau →



x

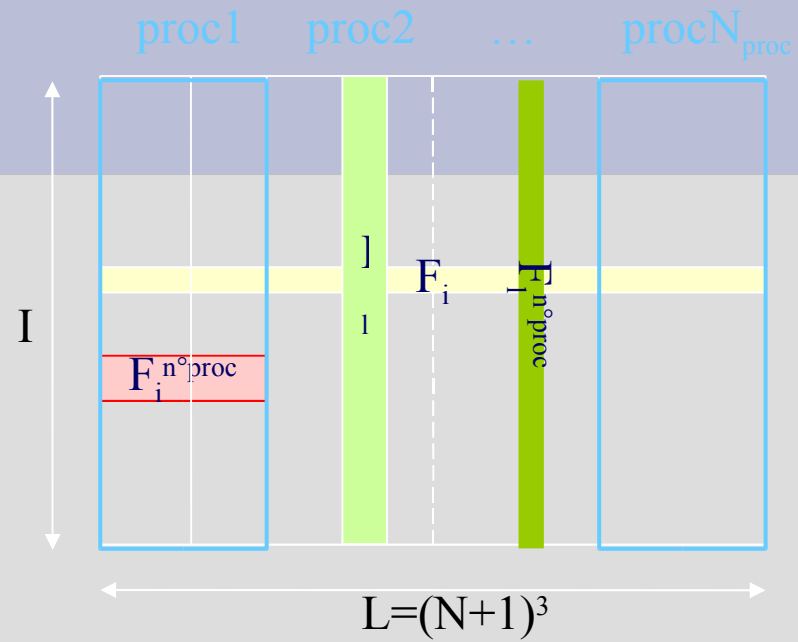
PARALLELISATION (avec MPI)

Algorithme séquentiel:

```
For l=1... L
  convection(F_l, v)
```

```
For i=1...I
  RK4_1(F_i, A, E_x, B_z)
```

```
ρ, j_x, j_y, j_z ← couplage(F_il)
E, B ← Maxwell(ρ, j_x, j_y, j_z)
```



Algorithme parallélisé :

```
For l=1... L/Nproc
  convection(F_l, v)
```

```
For i=1...I
  RK4_1(Fin°proc, A, E_x, B_z)
```

} local à chaque processeur

Pas de transposition à faire de la matrice F(i, l)

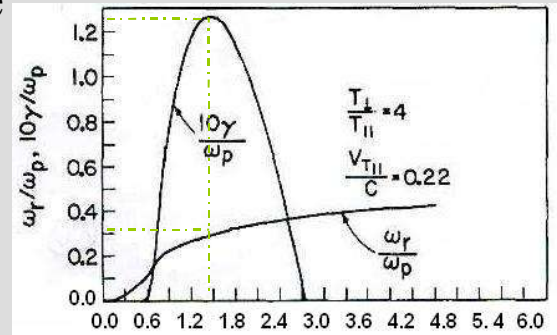
CAS TEST 1D_x-3D_v
INSTABILITES WHISTLERS

$$a = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 9$$

$$v_{T_{\parallel}} = 1/16$$

$$f^0(x, v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} a v_{T_{\parallel}}^3} e^{-\frac{v_x^2}{v_{T_{\parallel}}^2}} e^{-\frac{v_y^2 + v_z^2}{a v_{T_{\parallel}}^2}}$$

- Plasma peu dense anisotropique
- Distribution initiale bi-maxwellienne
- CB périodiques
- Champ statique $B_x = 0.5$
- Champs initiaux perturbés
- Boite de simulation : $L_x = 2\pi/k$



➔ Mode dominant k
(γ, ω_r)

Ossakow *et al.*
Phys. Fluids (1972)

Résultats attendus :

- * Croissance exponentielle de l'énergie magnétique tq taux de croissance = γ
- * Energies électriques transverses ($B_y^2/8$ et $B_z^2/8$) sont en opposition de phases.

=> excitation d'ondes électromagnétiques circulaires de mode Whistlers

REALISATION DU CALCUL DE CEINTURES

➤ Méthodologie :

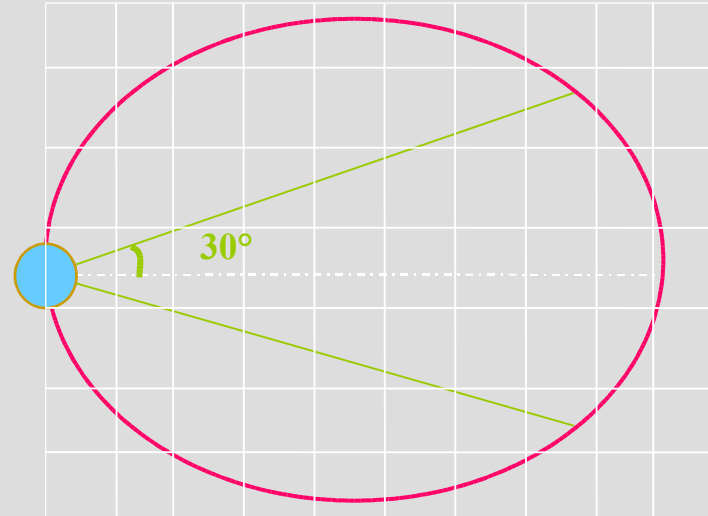
1- Maillage rectangulaire

2- Passage CB périodiques

=> CB ouvertes

3- Prise en compte des CL :

- cône de perte
- effet miroir
- réflexion des ondes.



- Premiers calculs de la dynamique des CVA sur maillage rectangulaire
- Interprétation de phénomènes physiques et calcul des flux de particules piégées.