

Méthode à deux grilles d'ordre deux en temps pour Navier-Stokes non stationnaire incompressible

Hyam Abboud

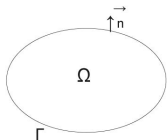
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie - Paris
& Faculté des Sciences, Université Saint-Joseph - Beyrouth

sous la direction de V. Girault et T. Sayah
Canum 2006

30 Mai 2006

Problème de Navier-Stokes

Étude du comportement d'un fluide incompressible dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, borné de frontière assez régulière $\Gamma = \partial\Omega$ et de normale extérieure \vec{n} .



- Équations de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nu \Delta u(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla u(x, t) + \nabla p(x, t) &= f(x, t), \\ \operatorname{div} u(x, t) &= 0, \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

- Idée: Discrétisation de (1) sur une grille grossière puis sur une grille fine en linéarisant $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ par $\vec{u}_H \cdot \nabla \vec{u}_h$.

Problème de Navier-Stokes

- But: Si $h^2 = H^3$, l'erreur est $O(h^2)$. Le but est de **gagner du temps**.
- Difficulté: Estimation d'erreur en norme L^2 basée sur un **argument de dualité**.
- Discrétisations: spatiales (H et h) et temporelle ($\Delta t = \frac{T}{N}$ et $t^n = n\Delta t, 0 \leq n \leq N$).
- E.F **Taylor-Hood** $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$. η est le pas d'espace ($= H$ ou h):

$$X_\eta = \{v_\eta \in H_0^1(\Omega)^2; \forall \kappa \in \tau_\eta, v_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_2\},$$

$$M_\eta = \{q_\eta \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \forall \kappa \in \tau_\eta, q_\eta|_\kappa \in \mathbb{P}_1\}.$$

① Grille Grossière: problème non-linéaire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}(3u_H^{n+1} - 4u_H^n + u_H^{n-1}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{n+1}, \nabla v_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} v_H) \\ & + (u_H^{n+1} \cdot \nabla u_H^{n+1}, v_H) + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u_H^{n+1}, u_H^{n+1} \cdot v_H) = \langle f^{n+1}, v_H \rangle, \\ & (q_H, \operatorname{div} u_H^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

② Grille Fine: problème linéarisé

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) \\ & + (u_H^{n+1} \cdot \nabla u_h^{n+1}, v_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \langle f^{n+1}, v_h \rangle, \\ & (q_h, \operatorname{div} u_h^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

avec $u_H^0 = u_h^0 = 0$, u_H^1 et u_h^1 obtenus par une itération du schéma d'Euler en temps: erreur est donc en $O(\Delta t^2)$.

① Grille Grossière: problème non-linéaire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}(3u_H^{n+1} - 4u_H^n + u_H^{n-1}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{n+1}, \nabla v_H) - (p_H^{n+1}, \operatorname{div} v_H) \\ & + (u_H^{n+1} \cdot \nabla u_H^{n+1}, v_H) + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u_H^{n+1}, u_H^{n+1} \cdot v_H) = \langle f^{n+1}, v_H \rangle, \\ & (q_H, \operatorname{div} u_H^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

② Grille Fine: problème linéarisé

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h) \\ & + (u_H^{n+1} \cdot \nabla u_h^{n+1}, v_h) - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} v_h) = \langle f^{n+1}, v_h \rangle, \\ & (q_h, \operatorname{div} u_h^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

avec $u_H^0 = u_h^0 = 0$, u_H^1 et u_h^1 obtenus par une itération du schéma d'Euler en temps: erreur est donc en $O(\Delta t^2)$.

Estimations de Stokes

L'estimation d'erreur d'ordre 2 en temps dans $L^2(\Omega \times]0, T])^2$ est basée sur un **argument de dualité** pour le problème de Stokes dépendant du temps.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \nu \Delta v(x, t) + \nabla q(x, t) = g(x, t), \operatorname{div} v(x, t) = 0 + \begin{cases} C.I \\ C.L \end{cases}$$

discrétisé

$$\frac{1}{2\Delta t} (3v_\eta^{n+1} - 4v_\eta^n + v_\eta^{n-1}, z_\eta) + \nu (\nabla v_\eta^{n+1}, \nabla z_\eta) - (q_\eta^{n+1}, \operatorname{div} z_\eta) = (g^{n+1}, z_\eta),$$

$$(\lambda_\eta, \operatorname{div} v_\eta^{n+1}) = 0.$$

Problème de Stokes rétrograde

Argument de dualité basé sur le problème de Stokes rétrograde:

$$-\frac{w^{n+1} - 4w^n + 3w^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \Delta w^{n-1} - \nabla \lambda^{n-1} = v_\eta^{n-1} - v(t^{n-1}),$$

$$\operatorname{div} w^{n-1} = 0, w^{n-1}|_{\partial\Omega} = 0, w^{N+1} = w^N = 0.$$

Théorème: Si Ω est convexe, $g \in L^2(\Omega \times]0, T[)^2$,
 $v \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^2)$, $q \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, et $v' \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$,
 alors il existe une constante C , indépendante de $\eta, \Delta t$ et g telle que

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \left\| v_\eta^{n-1} - v(t^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2).$$

Rappel du but: Estimation d'ordre 2 en norme L^2 de $u_\eta^n - u(t^n) \Rightarrow$

Résultat de superconvergence

une contribution **linéaire** et une autre **non-linéaire**:

- **Linéaire** $\|v_\eta^{n+1} - u(t^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}$ estimée d'après le Théorème avec $g^{n+1} = f^{n+1} - u(t^{n+1}) \cdot \nabla u(t^{n+1})$.
- "Superconvergence" pour la **non-linéaire** $\|v_\eta^{n+1} - u_\eta^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$:

" $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ " et " $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ "

sont en $O(\eta^3 + (\Delta t)^2 + \eta(\Delta t)^2)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|u(t^n) - u_\eta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\eta^3 + (\Delta t)^2),$$

où C est une constante indépendante de η et Δt .

Estimation d'erreur de la solution fine

Théorème: La solution (u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) de la Deuxième Etape satisfait:

Pour la vitesse, " $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ " et " $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ "

de la vitesse sont en $O(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2 + H(\Delta t)^2)$.

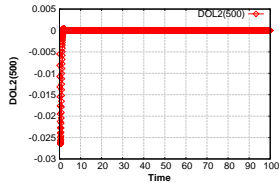
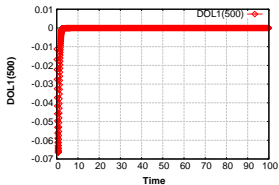
Pour la pression, " $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ " est en $O(H^3 + h^2 + (\Delta t)^2)$.

Sous l'hypothèse: Il existe deux constantes α' et $\gamma' > 0$ indépendantes de Δt et H telles que

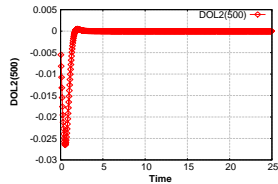
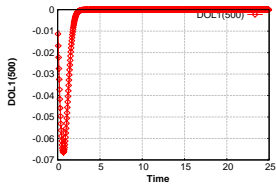
$$\alpha' H^3 \leq (\Delta t)^2 \sim h^2 \leq \gamma' H^3, \quad (2)$$

alors elles sont en h^2 .

Stabilité par rapport au temps



Stabilité par rapport au temps



Ordre de convergence

En imposant $f = f(t, x, y)$, $(u, p) = (\text{rot } \psi, p)$ avec:
 $\psi(t, x, y) = te^{-t^2(x+y)}y^2(1-y)^2\sin^2(\pi x)$ et
 $p(t, x, y) = te^{-t}\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

$N_g = 4, 9, 16$ et 25 avec $N_f^2 = N_g^3$, $T = 1$ et $nbiter = T \times N_f$.

| mailles | N_f | L^2 | H^1 | L^2 pression |
|-----------------------|-------|----------|-----------|----------------|
| $H = 1/4, h = 1/8$ | 8 | -1.9665 | -.0392877 | -1.91479 |
| $H = 1/9, h = 1/27$ | 27 | -3.91066 | -1.78782 | -2.99626 |
| $H = 1/16, h = 1/64$ | 64 | -4.91066 | -2.44335 | -3.74569 |
| $H = 1/25, h = 1/125$ | 125 | -5.50908 | -2.75303 | -4.32621 |

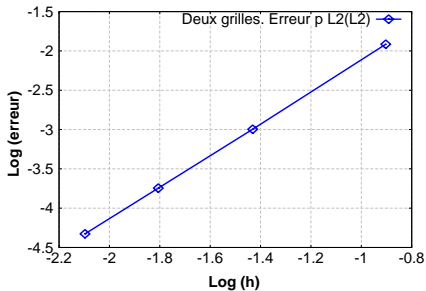
Ordre de convergence



Ordre de convergence



Ordre de convergence

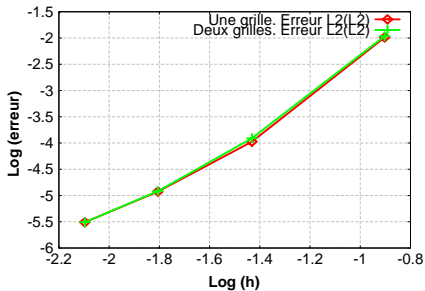


Comparaison en temps de calcul

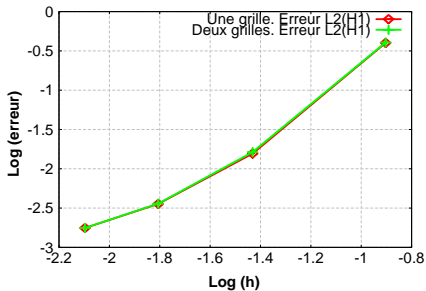
| | | | | |
|---|--------------|----------------|----------------|------------------|
| $N_f \times N_f$ points | 8×8 | 27×27 | 64×64 | 125×125 |
| t_{1G} en secondes | 7.25 | 304.953 | 13346.01 | 363402.083 |
| t_{2G} en secondes | 4.89 | 196.25 | 7340.34 | 174433 |
| $\frac{ t_{2G} - t_{1G} }{t_{1G}}$ (en %) | 32.5 | 35.64 | 45 | 52 |

Table: Comparaison en temps de calcul CPU.

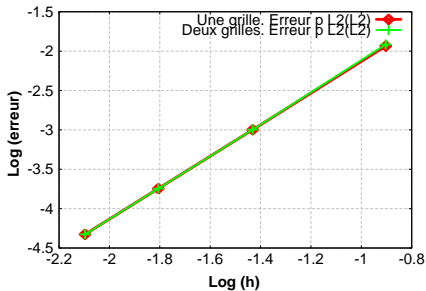
Comparaison $L^2_{t,x}$



Comparaison $L^2_t(H^1_x)$



Comparaison p $L^2_{t,x}$



Conclusion

- On a bien montré que si $h^2 = H^3$ et $\Delta t = h$ alors l'erreur finale du schéma à deux grilles est

$$\left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|u_h^{n+1} - u(t^{n+1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = O(h^2).$$

- La précision de la méthode sur la grille fine est la même que si le champ advectif est traité non linéairement.
- La comparaison en temps de calcul montre les potentialités de la technique à deux grilles.

Perspectives

- Schéma à deux grilles correspondant au problème implicite non anti-symétrisé, d'ordre un en temps.
- Analyse théorique des deux étapes grossière et fine intercalées.
- Application du concept à d'autres problèmes non-linéaires: aux systèmes dissipatifs non-linéaires (Kuramoto-Sivashinsky, Ginzburg-Landau, Cahn-Hilliard, Réaction-diffusion, Burgers, etc).
- Utilisation d'autres types d'éléments-finis: discontinus, l'élément fini de Crouzeix-Raviart, etc.