

Résolution du Problème de Stokes Généralisé :

«Uzawa préconditionné» vs. «Helmholtz-Hodge préconditionné»

Abdou Garba & Pierre Haldenwang

Univerisidade Federal do Cearà (Fortaleza, Brasil) & Université de Provence (Marseille)

Plan :

Problème de Stokes Généralisé (GSP) est une brique élémentaire pour la résolution des écoulements contraints (incompressibles, bas nombre de Mach,)

$$GSP_0 \equiv \begin{cases} \mathbf{S}\bar{u} - \mathbf{n}\Delta\bar{u} + \bar{\nabla}p = \bar{f} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \bar{u} = \bar{b} \text{ on } \partial\Omega & \text{with } \bar{b}\cdot\bar{n} = 0 \end{cases} \quad \text{est générique des écoulements contraints}$$

**Présentation de quelques algorithmes d'Uzawa préconditionnés et
d'un algorithme de projection d'Helmholtz-Hodge preconditionné**

Comparaison des performances

Contrainte pour Ecoulements à faible nombre de Mach ($M < 0.3$)

Considérons les équations de conservation pour un fluide de newtonien,
 Son état dépend de T , p et de fractions massiques d'espèces chimiques Y_i .

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r\bar{V}) = 0$$

$$\frac{\partial(r\bar{V})}{\partial t} + \text{div}(r\bar{V} \otimes \bar{V}) = \text{div}(\bar{\bar{S}}_v) - \bar{V}p + r\bar{g}$$

$$rc_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} T \right) - aT \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} p \right) = \text{div}(I \bar{\nabla} T) + \bar{\bar{S}}_v : \bar{\nabla} \bar{V} + w_T(T, Y_1, \dots, Y_N)$$

$$r \left(\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} Y_i \right) = \text{div}(rD_i \bar{\nabla} Y_i) + w_i(T, Y_1, \dots, Y_N) \quad i=1, \dots, N$$

- avec (fluide newtonien): $\bar{\bar{S}}_v = \mathbf{m} \left(\bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^t \right) + I \text{div}(\bar{V}) \bar{\bar{I}}$

- équation d'état du fluide (variance n+1) $r = r(T, p, Y_1, \dots, Y_{N-1})$

- W : sources volumiques de dégagement d'énergie ou de création/disparition d'espèces

- flux diffusifs : lois de Fourier et de Fick, I , D_i

Contrainte pour écoulements à faible nombre de Mach (suite)

La pression (dynamique) est dimensionnée par la quantité $\mathbf{r}\|\mathbf{V}\|^2$

à comparer à la pression thermodynamique qui est de l'ordre de $\mathbf{r}C_S^2$

$$\rightarrow p(\bar{x}, t) = p_0(\bar{x}, t) + M^2 p_1(\bar{x}, t)$$

reportée dans N.S. et à l'ordre zéro $\Rightarrow \bar{\nabla} p_0 = \mathbf{r}g$

or $gH \ll C_S^2 \rightarrow p_0(t)$ ($\frac{dp_0(t)}{dt}$ dépend du dégagement total d'énergie)

$$\text{alors } \text{div}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{V}}) = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial t} \right\} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \frac{dp_0}{dt}$$

$$\rightarrow \int \text{div}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{V}}) = \int \mathbf{r}\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \text{ fournit l'évaluation de } p_0(t) \text{ par } \frac{dp_0}{dt} \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} = -\int \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial t} \right\}$$

$$\rightarrow \text{une contrainte sur le champ de vitesse : } \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{V}}) = -\frac{1}{\mathbf{r}c_p} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial T} [-\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\nabla} T + \text{div}(\mathbf{I}\bar{\nabla} T) + \mathbf{w}_T] \quad \dots\dots \\ \dots\dots - \sum_i \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Y_i} [-\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\nabla} Y_i + \text{div}(\mathbf{r}D_i \bar{\nabla} T) + \mathbf{w}_i] - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \frac{dp_0}{dt} \end{array} \right.$$

\rightarrow aussi, p n'est plus gouvernée par un sous-système d'EDP hyperboliques, mais par

$$\frac{\partial(\mathbf{r}\bar{\mathbf{V}})}{\partial t} + \bar{\nabla} p + \dots = \dots \quad \text{contraint par } \boxed{\text{div}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{V}}) = g(\bar{x}, (n+1)\Delta t)} \quad \text{!!!!}$$

Problème de Stokes Généralisé (GSP) (exemple à propos d'un schéma semi-implicite)

Champs scalaires *température* *et* *espèces*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{k}_0 \Delta T = S_T \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial t} - D_{i0} \Delta Y_i = S_{Y_i}$$

avec
$$S_T \equiv -\bar{V} \cdot \bar{\nabla} T + \frac{1}{rc_p} \left\{ \text{div}(\mathbf{I} \bar{\nabla} T) - rc_p \mathbf{k}_0 \Delta T + \mathbf{w}_T(T, Y_1, \dots, Y_N) \right\}$$

et
$$S_{Y_i} \equiv -\bar{V} \cdot \bar{\nabla} Y_i + \frac{1}{\mathbf{r}} \left\{ \text{div}(\mathbf{r} D_i \bar{\nabla} Y_i) - \mathbf{r} D_{i0} \Delta Y_i + \mathbf{w}_i(T, Y_1, \dots, Y_N) \right\}$$

et où les coefficients (uniformes) sont $\mathbf{k}_0 = \max\left(\frac{\mathbf{I}}{rc_p}\right)$ et $D_{i0} = \max(D_i)$

Discrétisation temporelle (à préciser ultérieurement), mais on s'attend à ce que

S_T et S_{Y_i} soient des extrapolations de valeurs connues aux étapes de temps précédentes

d'où les problèmes d'Helmholtz elliptiques $\mathbf{s}_0 u - D_0 \Delta u = S_u$

Problème de Stokes Généralisé (suite)

Formulation "m,p"

à l'étape de temps $(n+1)Dt$, les champs scalaires sont maintenant connus

→ également, les caractéristiques physiques : densité, viscosité, conductivité, etc.

revenons à $div(\bar{\mathbf{S}}_v) = div[\bar{\mathbf{m}}\bar{\nabla}\bar{V}] + \bar{\nabla}[(\mathbf{1} + \mathbf{m})div(\bar{V})] - \bar{\nabla}\mathbf{m}[div(\bar{V})\bar{\mathbf{I}} - \bar{\nabla}\bar{V}^t]$

- le gradient d'un champ scalaire → $\mathbf{p} = p - (\mathbf{1} + \mathbf{m})div(\bar{V})$

- le troisième terme (degré différentiel 1) → explicite

- le premier terme : on pose $\mathbf{n}_0 = \max\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{r}}\right)$ et $\bar{m} = \mathbf{r}\bar{V}$, la densité de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} - \mathbf{n}_0 \Delta \bar{m} + \bar{\nabla} \mathbf{p} = \bar{\mathbf{S}}_m$$

avec $\bar{\mathbf{S}}_m \equiv -div(\mathbf{r}\bar{V} \otimes \bar{V}) + div[\bar{\mathbf{m}}\bar{\nabla}\bar{V} - \mathbf{n}_0 \bar{\nabla}\mathbf{r}\bar{V}] - \bar{\nabla}\mathbf{m}[div(\bar{V})\bar{\mathbf{I}} - \bar{\nabla}\bar{V}^t]$

d'où le *Problème de Stokes Généralisé* :

sous la contrainte

$$\mathbf{s}_0 \bar{m} - \mathbf{n}_0 \Delta \bar{m} + \bar{\nabla} \mathbf{p} = \bar{\mathbf{s}}_m$$

$$div(\bar{m}) = g \approx -\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^{n+1}$$

de GSP à GSP0 (en toute généralité)

$$GSP \equiv \begin{cases} \mathbf{s}\bar{u} - \mathbf{n}\Delta\bar{u} + \bar{\nabla}p = \bar{f} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = g & \text{in } \Omega \\ \bar{u} = \bar{u}_0 \quad \text{on } \partial\Omega & \text{with } \int_{\partial\Omega} \bar{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} = \int_{\Omega} g \end{cases}$$

Or, si l'on pose $\bar{u} = \bar{v} + \bar{\nabla}\mathbf{y}$ avec \mathbf{y} solution du problème $\begin{cases} \Delta\mathbf{y} = g & \text{in } \Omega \\ \bar{\nabla}\mathbf{y} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ alors
(à une constante près)

$$\Rightarrow GSP_0 \equiv \begin{cases} \mathbf{s}\bar{v} - \mathbf{n}\Delta\bar{v} + \bar{\nabla}p = \bar{F} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \bar{v} = \bar{b} \quad \text{on } \partial\Omega & \text{with } \bar{b} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \end{cases}$$

où $\bar{F} \equiv \bar{f} - \mathbf{s}\bar{\nabla}\mathbf{y} - \mathbf{n}\Delta\bar{\nabla}\mathbf{y}$ in Ω et $\bar{b} \equiv \bar{u}_0 - \bar{\nabla}\mathbf{y}$ on $\partial\Omega$

Opérateur sur la pression

Th. des EDP $\rightarrow p \in L^2_{<0>}(\Omega)$, ensemble des fonctions de carré sommable et à moyenne nulle sur Ω

Posons $H_{D\bar{b}}$ l'opérateur inversible tel que $H_{D\bar{b}}(\bar{v}) \equiv \mathbf{s}\bar{v} - \mathbf{n}_0\Delta\bar{v}$ dans Ω
 muni de $\bar{v} = \bar{b}$ sur $\partial\Omega$ avec $\bar{b}.\bar{n} = 0$ sur $\partial\Omega$

Alors, notons $\bar{u}_0 = H_{D\bar{b}}^{-1}(\bar{F})$, la solution (unique) de $H_{D\bar{b}}(\bar{u}_0) = \bar{F}$

Alors $\bar{u} + \bar{u}_0$ sera solution de GSP0 si \bar{u} satisfait
$$\begin{cases} \mathbf{s}\bar{u} - \mathbf{n}_0\Delta\bar{u} = -\bar{\nabla}p & \text{in } \Omega \\ \text{div}(\bar{u}) = -\text{div}(\bar{u}_0) & \text{in } \Omega \\ \bar{u} = \bar{0} & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors, p satisfait

$$Ap \equiv \text{div}\left[H_{D_0}^{-1}\left(-\bar{\nabla}p\right)\right] = -\text{div}(\bar{u}_0)$$

or $\int_{\Omega} A(p_1)p_2 = \int_{\Omega} \left[\mathbf{s}\bar{u}_1.\bar{u}_2 + \mathbf{n}_0\bar{\nabla}u_1 : \bar{\nabla}u_2\right]$

$\rightarrow A$, opérateur **auto-adjoint, isomorphisme fortement elliptique** sur $L^2_{<0>}$ en conséquence

Algorithme d'Uzawa

converge pourvu que la valeur $\mathbf{t} > 0$ soit suffisamment petite.

$$\mathbf{S} \mathbf{u}^{-k+1} - \mathbf{n}_0 \Delta \mathbf{u}^{-k+1} = -\bar{\nabla} p^k \quad \text{dans } \Omega$$

$$\text{muni de } \mathbf{u}^{-k+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$p^{k+1} = p^k + \mathbf{t} \left[d_0 - \text{div}(\mathbf{u}^{-k+1}) \right] \quad \text{dans } \Omega$$

Propriétés de convergence de l'algorithme d'Uzawa

$$p^{k+1} = p^k + \mathbf{t} \left[d_0 - A(p^k) \right]$$

On montre (ou l'on observe numériquement) que

- ❖ à grand Reynolds ($\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{n}_0} \gg 1$), l'opérateur sur la pression se comporte comme $A \approx \text{Re } \Delta$
 - ❖ le spectre (discret) de A n'est pas forcément réel (positif) dans la pratique numérique
 - ❖ néanmoins majoré en module par 1
 - ❖ contient de très petites valeurs propres réelles qui tendent vers zéro
- ➔ nombre de conditionnement de A croît avec N (comme N^2 ou pire)

Nécessité de préconditionner !!! ➔ $p^{k+1} - p^k = \mathbf{t} C^{-1} (d_0 - A(p^k))$

où C , facilement inversible, approche suffisamment A afin que $C^{-1}A \approx I$

Choix (heuristique) d'un préconditionneur

$$A \equiv \operatorname{div} \left[H_{D_0}^{-1} \left(-\bar{\nabla} \right) \right] \text{ admet la signature Fourier : } \quad \mathbf{l}_{\bar{k}} = \frac{4\mathbf{p}^2 \bar{k}^2 / L^2}{\mathbf{s} + \mathbf{n}_0 4\mathbf{p}^2 \bar{k}^2 / L^2}$$

$$\text{alors } C^{-1} \text{ devrait avoir la signature : } \quad \frac{1}{\mathbf{l}_{\bar{k}}} = \frac{\mathbf{s} + \mathbf{n}_0 4\mathbf{p}^2 \bar{k}^2 / L^2}{4\mathbf{p}^2 \bar{k}^2 / L^2} = \mathbf{n}_0 + \frac{\mathbf{s}}{4\mathbf{p}^2 \bar{k}^2 / L^2}$$

Propositions de préconditionneurs ayant cette signature

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| a) méthode AIT | $C^{-1} = \Delta^{-1} H_{D_0}$ | (approximate influence technique) |
| b) méthode FWP (geom. cart.) | $C^{-1} \equiv \Delta^{-1} H_{N_0 D_0}$ | (fictitious wall permeability) & (cart. geom.) |
| c) « CC optimal précondit. » | $C^{-1} \equiv \mathbf{n}_0 + \mathbf{s} \Delta^{-1}$ | (Cahouët & Chabard) |
| d) méthode FWP+Filtering | $C^{-1} \equiv \left(P \Delta^{-1} F \right) H_{N_0 D_0}$ | (fictitious wall permeability+pressure filtering) |

Algorithme de projection par décomposition d'Helmholtz-Hodge (HH)

soit à résoudre

$$GSP_0 \equiv \begin{cases} \mathbf{s}\bar{v} - \mathbf{n}\Delta\bar{v} + \bar{\nabla}p = \bar{F} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \bar{v} = \bar{b} & \text{on } \partial\Omega \quad \text{with } \bar{b} \cdot \bar{n} = 0 \end{cases} \quad \text{à l'aide d'un champ auxiliaire}$$

Décomposition HH (orthogonale au sens $L^2(\Omega)$)

Soit $HH_0(\operatorname{div}0, \Omega) = \left\{ \bar{u} \in [L^2(\Omega)]^d, \operatorname{div}(\bar{u}) = 0, \bar{n} \cdot \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$, alors $[L^2(\Omega)]^d = \operatorname{grad}H^1(\Omega) \oplus HH_0(\operatorname{div}0, \Omega)$

En d'autre termes, si $\bar{w}^* \in [L^2(\Omega)]^n$, $\bar{w}^* = \bar{\nabla}f + \bar{w}$ avec $\operatorname{div}(\bar{w}) = 0$ et $(\bar{w} \cdot \bar{n})|_{\partial\Omega} = 0$

Soit \bar{w}^ un champ de vecteur défini sur un ouvert Ω de \mathfrak{R}^3 , de frontière «douce» $\partial\Omega$.*

alors, si \bar{w}^ est suffisamment régulier, \bar{w}^* se décompose, de manière unique,*

en la somme d'un champ dérivant d'un potentiel et d'un champ à divergence nulle,

ce dernier étant parallèle à $\partial\Omega$ en tout point de la frontière.

La donnée de la divergence du champ \bar{w}^* permet de réaliser cette décomposition en résolvant

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\bar{w}^*\right) \quad \text{muni de } (\bar{\nabla}f \cdot \bar{n})|_{\partial\Omega} = \bar{w}^* \cdot \bar{n}|_{\partial\Omega}$$

Algorithme itératif de projection

Soit $\{\bar{u}, p\}$ solutions de

$$GSP_0 \equiv \begin{cases} \mathbf{s}\bar{u} - \mathbf{n}\Delta\bar{u} + \bar{\nabla}p = \bar{F} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \bar{u} = \bar{b} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{with } \bar{b} \cdot \bar{n} = 0$$

On définit le champ scalaire auxiliaire \mathbf{j} tel que

$$\begin{cases} \mathbf{s}\mathbf{j} - \mathbf{n}\Delta\mathbf{j} = p & \text{in } \Omega \\ \bar{\nabla}\mathbf{j} \cdot \bar{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

On déduit que $\bar{u}^* = \bar{u} + \bar{\nabla}\mathbf{j}$ est solution de

$$\begin{cases} \mathbf{s}\bar{u}^* - \mathbf{n}\Delta\bar{u}^* = \bar{F} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div}(\bar{u}^*) = -\Delta\mathbf{j} & \text{in } \Omega \\ \bar{u}^* = \bar{b} + \bar{\nabla}\mathbf{j} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{with } \bar{b} \cdot \bar{n} = 0$$

que l'on résout à l'aide de l'algorithme itératif suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{s}\left(\bar{u}^*\right)^{k+1} - \mathbf{n}\Delta\left(\bar{u}^*\right)^{k+1} = \bar{F} \\ \bar{u}^* = \bar{b} + \bar{\nabla}\mathbf{j}^k & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{suivi de} \quad \begin{cases} -\Delta\mathbf{j}^{k+1} = \operatorname{div}\left[\left(\bar{u}^*\right)^{k+1}\right] & \text{in } \Omega \\ \bar{\nabla}\mathbf{j}^{k+1} \cdot \bar{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Puis **décomposition HH** de \bar{u}^* obtenu à convergence.... donne \bar{u} et enfin $p = \mathbf{s}\mathbf{j} - \mathbf{n}\Delta\mathbf{j}$

Opérateur sur \mathbf{j}

$$\bar{u}^* = \bar{u} + \bar{\nabla}\mathbf{j} \quad \text{donne} \quad \bar{u}^* = H_D^{-1}(-\bar{\nabla}p) + H_D^{-1}(\bar{F}) + \bar{\nabla}\mathbf{j} . \quad \text{Or, } p = H_N(\mathbf{j}) , \quad \text{alors}$$

$$\bar{u}^* = H_D^{-1}(-\bar{\nabla}H_N(\mathbf{j})) + H_D^{-1}(\bar{F}) + \bar{\nabla}\mathbf{j} \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{j} = \text{div}(\bar{u}^*) = \text{div}[H_D^{-1}(-\bar{\nabla}H_N(\mathbf{j}))] + \text{div}[H_D^{-1}(\bar{F})] + \Delta\mathbf{j}$$

d'où \mathbf{j} est solution de

$$B\mathbf{j} = -\text{div}[H_D^{-1}(\bar{F})] \quad \text{avec} \quad B\mathbf{j} \equiv \text{div}[H_D^{-1}(-\bar{\nabla}H_N(\mathbf{j}))]$$

L'analyse de la signature Fourier donne celle d'un laplacien !!!

D'où le pré-conditionneur $C^{-1} = \Delta^{-1}$ que l'on a inséré dans le système itératif

$$\text{pour calculer l'incrément} \quad \mathbf{dj} \equiv \mathbf{t}\Delta^{-1}\text{div}[H_D^{-1}(\bar{F} - \bar{\nabla}H_N(\mathbf{j}))]$$

Calcul du nombre de conditionnement en 2D (dont 1D périodique) donne

- une faible dépendance du nombre de conditionnement de $\Delta^{-1}B$ en fonction de $\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{n}_0}$

- le domaine de variation réduit de $\text{cond}(\Delta^{-1}B)$: $2 \leq \text{cond}(\Delta^{-1}B) \leq 2.857$

Comparaison des performances numériques [Spectral Chebyshev 3D, (N=32)³]

Residual	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{n}_0} = 1$, k = 3	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{n}_0} = 1$, k = 10	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{n}_0} = 1000$, k = 3	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{n}_0} = 1000$, k = 10
AIT	$3. 10^{-1}$	$3. 10^{-2}$	$2. 10^{-1}$	$3. 10^{-3}$
CC	$3. 10^{-1}$	$3. 10^{-2}$	$2. 10^{-1}$	$3. 10^{-3}$
FWP (cart.)	$7. 10^{-3}$	$1.5 10^{-5}$	$5. 10^{-4}$	$4. 10^{-5}$
FWP+Filtering (cart.)	$8. 10^{-3}$	$1. 10^{-6}$	$7. 10^{-3}$	$1. 10^{-6}$
Projection HH	$3. 10^{-2}$	$1.5 10^{-5}$	$3. 10^{-2}$	$1.5 10^{-5}$

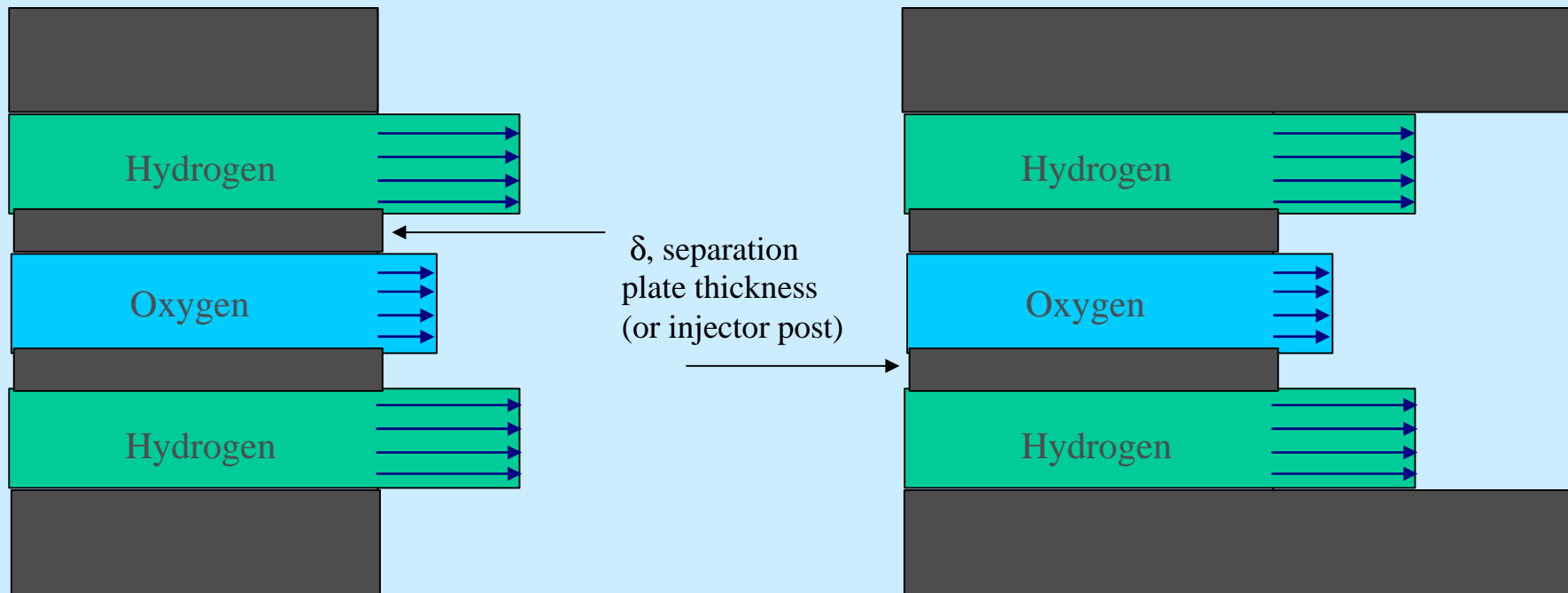
Pour géométrie non cartésienne : projection HH recommandée



The burning mixing layer is a fundamental issue in Combustion

Most of the time, fuel and oxidiser are injected separately.
=> spray or mixing layer configurations is created.

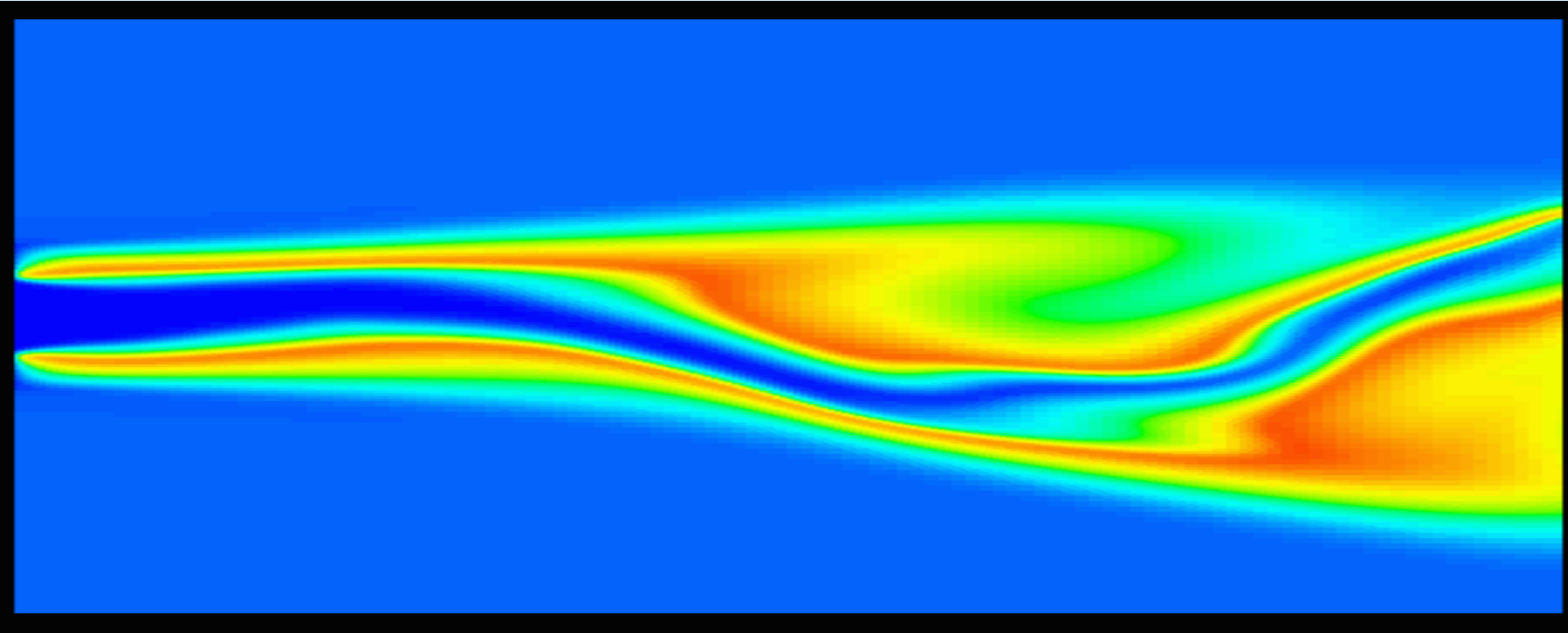
Two Considered Geometries with three-plane gaseous jets



Situation **without** recess

Situation **with** recess

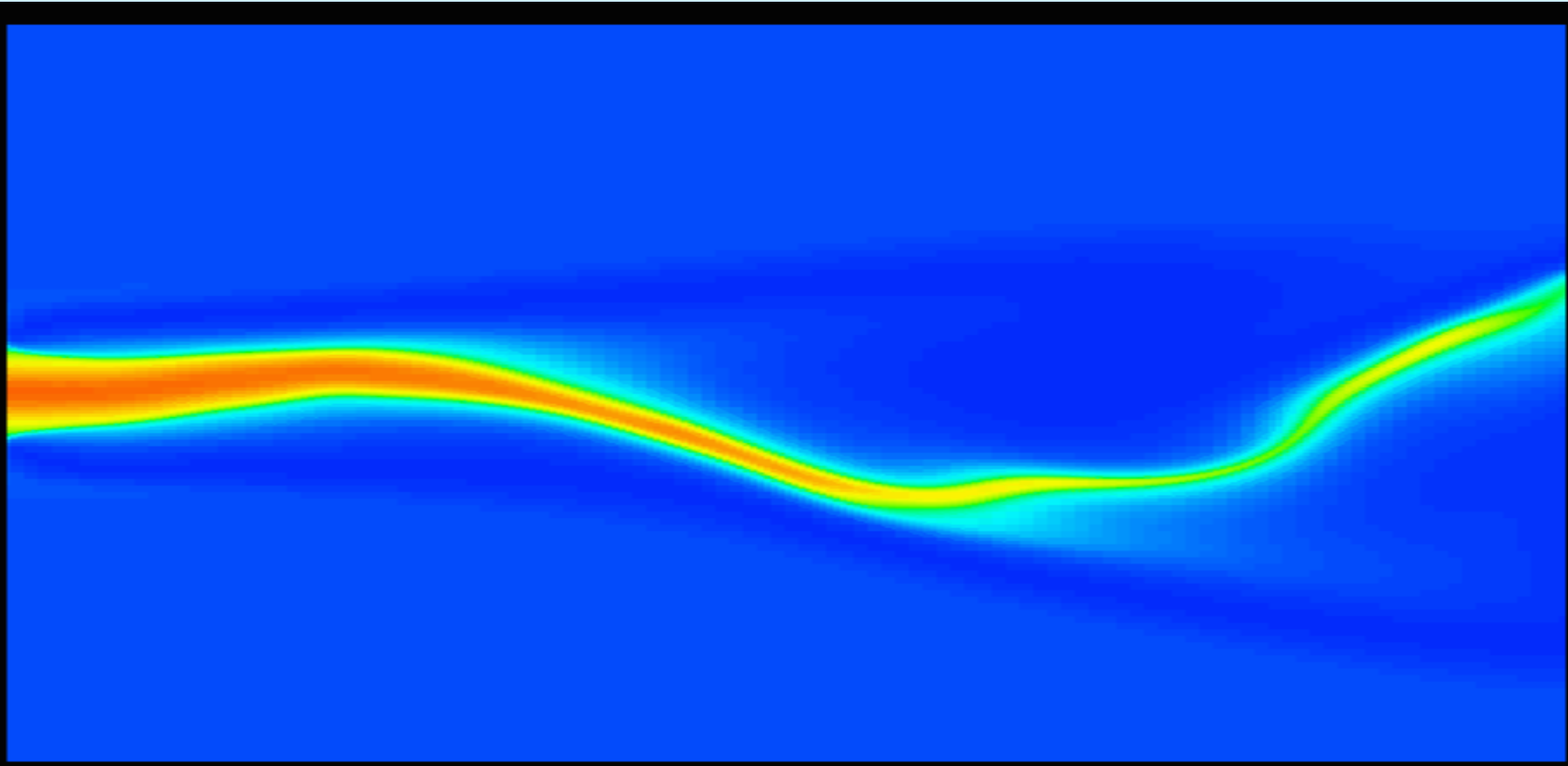
**At higher Reynolds number,
mixing layer subjected to wake/jet instability modes**



**Temperature field of diffusion flames anchored in the wake of
2 separation plates,**

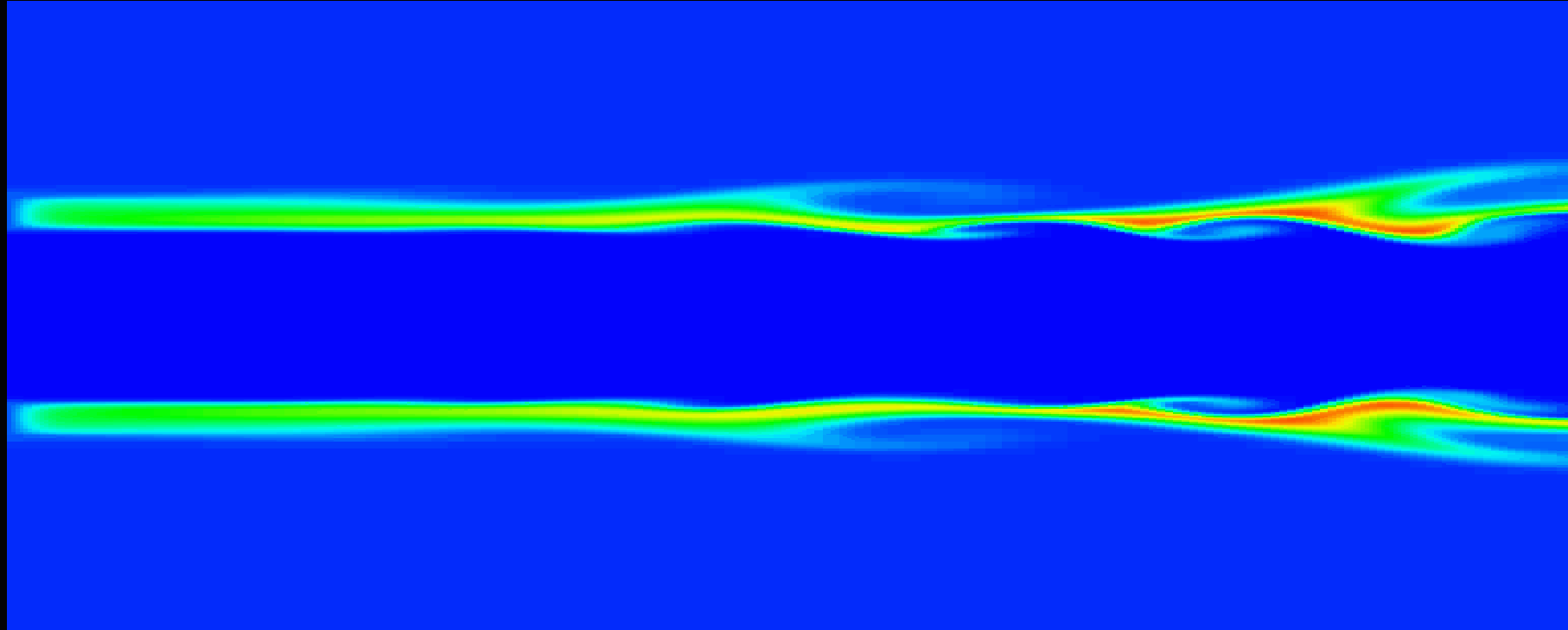
($Re=1500$, $J=1.25$, $V_{H_2} / V_{O_2}=3.15$, $D_{O_2}/e_f=5.2$)

At higher Reynolds number,
dense oxygen core stripped by wake/jet instabilities



Density field (same conditions)
($\text{Re}=1500$, $J=1.25$, $V_{\text{H}_2} / V_{\text{O}_2}=3.15$, $D_{\text{O}_2}/e_f=5.2$)

« Wavy » flame anchored in post recirculation zone



**Temperature field of a diffusion flame
anchored in the close wake of separation plates**

mixing layers submitted to 2 different Kelvin-Helmholtz instability modes

($Re=1500$, $J=1.25$, $V_H / V_O = 3.15$, $D_O / e_s = 5.2$)

Calcul dynamique de \mathbf{t}

- Evaluation par une méthode de gradient conjugué si la formulation s'y prête.
- Sinon, pour les méthodes de hautes précision de type méthodes spectrales
 - * Preconditioned Minimal Residual (PMR)

$$\mathbf{t}^{k+1} = \frac{\langle \mathbf{R}^k, \Delta \mathbf{j}^k \rangle}{\langle \Delta \mathbf{j}^k, \Delta \mathbf{j}^k \rangle}$$

- * Quasi Preconditioned Minimal Residual (QPMR)

$$\mathbf{t}^{k+1} = \frac{\|\mathbf{R}^k\|}{\|\Delta \mathbf{j}^k\|}$$