

Modélisation du parenchyme pulmonaire

CANUM 2006

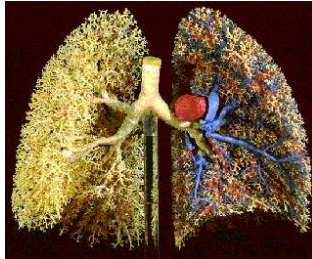
Léonardo Baffico
en collaboration avec C. Grandmont, Y. Maday, A. Osses
dans le cadre de l'ACI "lepoumonvousdisje"

Laboratoire JLL, Paris 6

31 mai 2006

Motivation

Moulage d'un poumon par E. R. Weibel



Modélisation de l'appareil respiratoire

Structure de l'arbre bronchique,

Arbre dichotomique – 23 générations.

- Les voies aériennes supérieures, l'arbre trachéo-bronchique.
Fluide visqueux incompressible, Equations de Navier–Stokes ;
- Les bronches segmentaires et bronchioles.
Ecoulement laminaire, Equations de Stokes, Loi de Poiseuille ;
- Les acinis : bronchioles alvéolaires, sacs alvéolaires.
Déformation du parenchyme, interaction fluide–structure ;

Modélisation de l'appareil respiratoire

Structure de l'arbre bronchique,

Arbre dichotomique – 23 générations.

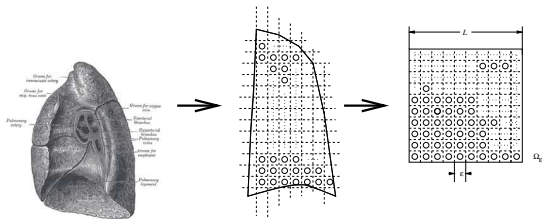
- Les voies aériennes supérieures, l'arbre trachéo-bronchique.
Fluide visqueux incompressible, Equations de Navier–Stokes ;
- Les bronches segmentaires et bronchioles.
Ecoulement laminaire, Equations de Stokes, Loi de Poiseuille ;
- Les acinis : bronchioles alvéolaires, sacs alvéolaires.
Déformation du parenchyme, interaction fluide–structure ;

Objectifs

Obtention de modèles simples mais représentatifs

- Modélisation de chacune des zones ;
- Couplage de différents modèles ;
- Prise en compte des autres parties grâce à des conditions aux limites adéquates ; [L. B, B. Maury, Céline Grandmont, A. Soualah]

Modélisation du parenchyme pulmonaire



Modélisation du parenchyme pulmonaire

Hypothèses

- Matériau linéaire élastique compressible ou incompressible ;
- Inclusion de bulles d'air réparties périodiquement :
 - 1- Gaz parfait ;
 - 2- Gaz visqueux incompressible, loi de Poiseuille ;

Modèle de "mousse"

Modèle fluide

$$p_\varepsilon V_\varepsilon = N_\varepsilon RT, \quad N_\varepsilon = \varepsilon^N \frac{|Y_F| p_a}{RT}$$

où V_ε est le volume d'une bulle après déformation.

V_ε dépend non linéairement de déplacement de la structure d^ε .

Après linéarisation on obtient le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \sigma(d^\varepsilon) = f_S \quad \text{in } \Omega^\varepsilon, \\ \sigma(d^\varepsilon)n^\varepsilon + \frac{p_a}{N\varepsilon^N |Y_F|} \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} d^\varepsilon \cdot n^\varepsilon d\gamma \right) n^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma^{\varepsilon,k}, \forall k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^N, \\ \sigma(d^\varepsilon)n = 0 \quad \text{on } \Gamma_N, \\ d^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma_D. \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma(\mathbf{d}^\varepsilon) : \mathbf{e}(\phi) + \frac{A}{\varepsilon N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^N} \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \mathbf{d}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \right) \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \phi \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \right) = \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f}_S \cdot \phi,$$

où $A = \frac{\rho_a}{N|Y_S|}$.

Estimation *a priori*

$$\phi = \mathbf{d}^\varepsilon$$

Inégalité de Korn $\implies (\mathbf{d}^\varepsilon)_\varepsilon$ bornée dans $H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Problème limite

$$d^\varepsilon(\mathbf{x}) = d^0(\mathbf{x}) + \varepsilon d^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^2 d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \dots$$

Problème cellule

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \sigma_y(d^1) = 0 & \text{dans } \Omega \times Y_S \\ \sigma_y(d^1) + A \left(\int_{\partial Y_F} d^1 \cdot n \right) n = A |Y_F| (\operatorname{div} d^0) n - \sigma(d^0) n, & \text{sur } \Omega \times \partial Y_F \\ d^1 \text{ } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Equation homogénéisée

$$-\operatorname{div} \sigma^0(d^0) - \operatorname{div} \left(\frac{1}{|Y_S|} \int_{Y_S} \sigma_y^1(d^1) dy \right) = f_S \quad \text{dans } \Omega,$$

avec $\sigma^0(\cdot) = 2\mu \mathbf{e}(\cdot) + \left(\lambda + A \frac{|Y_F|^2}{|Y_S|} \right) \operatorname{div}(\cdot) I,$

$\sigma^1(\cdot) = 2\mu \mathbf{e}(\cdot) + (\lambda - A |Y_F|) \operatorname{div}(\cdot) I$

Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Passage à la limite double échelle

$$d^\varepsilon \rightarrow d^0 \quad 2e,$$

$$\nabla d^\varepsilon \rightarrow \nabla d^0 + \nabla_y d^1 \quad 2e$$

Passage à la limite dans le terme :

$$\frac{A}{\varepsilon^N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^N} \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} d^\varepsilon \cdot n \right) \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \phi \cdot n \right) = C \int_{\Omega} \Pi_\varepsilon(\operatorname{div}(d^\varepsilon) \chi_F^\varepsilon) \Pi_\varepsilon(\operatorname{div}(\phi) \chi_F^\varepsilon)$$

où Π_ε est la projection L^2 sur l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les cellules.

Cas incompressible – $\lambda = +\infty$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\sigma(d^\varepsilon, q^\varepsilon)) = f_S & \text{in } \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} d^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega^\varepsilon \\ \sigma(d^\varepsilon, q^\varepsilon)n + \frac{p_a}{N\varepsilon^N |Y_F|} \left(\int_{Y^{\varepsilon,k}} d^\varepsilon \cdot n d\sigma \right) n = 0 & \text{on } \Gamma^{\varepsilon,k}, \forall k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^N, \\ \sigma(d^\varepsilon, q^\varepsilon)n = 0 & \text{on } \Gamma_N \\ d^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_D. \end{array} \right.$$

où $\sigma(d^\varepsilon, q^\varepsilon)$ est défini par

$$\sigma(d^\varepsilon, q^\varepsilon) = 2\mu e(d^\varepsilon) - q^\varepsilon I.$$

Cas incompressible - Problème limite

Problème cellule

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y \sigma_y(d^1, q^0) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_S \\ \operatorname{div}_y d^1 = -\operatorname{div}_x d^0 \text{ dans } \Omega \times Y_S \\ \sigma_y(d^1, q^0)n = -\sigma_x(d^0, 0)n + A(|Y|\operatorname{div}_x d^0)n \text{ sur } \Gamma \\ q^0, d^1 \text{ Y-périodique} \end{array} \right.$$

Problème homogénéisé

$$-\operatorname{div} \left(2\mu e(d^0) + \frac{1}{|Y_S|} \int_{Y_S} \sigma_y(d^1, q^0) + A \frac{|Y||Y_F|}{|Y_S|} \operatorname{div} d^0 \right) = f_S \text{ dans } \Omega$$

Modèle viscoélastique

Hypothèses On suppose que les alvéoles sont alimentées par des conduits, dans lesquels la loi de Poiseuille est vérifiée.

$$\implies p_\varepsilon = r_\varepsilon D_\varepsilon = r_\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} \partial_t \mathbf{d}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon,$$

où r_ε désigne la résistance du conduit.

Formulation variationnelle

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \partial_{tt} \mathbf{d}^\varepsilon \cdot \phi + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma(\mathbf{d}^\varepsilon) : \mathbf{e}(\phi) + r_\varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^N} \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \partial_t \mathbf{d}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \right) \left(\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \phi \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \right) \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f}_S \cdot \phi, \end{aligned}$$

Modèle viscoélastique

Problème limite Sous l'hypothèse $r_\varepsilon = \frac{r}{\varepsilon^N}$, on obtient un problème limite dissipatif.

Remarques

- $r_\varepsilon = 0(\varepsilon^{-\alpha})$, $\alpha < N \implies$ Plus de dissipation à limite.
- $r_\varepsilon = 0(\varepsilon^{-\alpha})$, $\alpha > N \implies ?$

Conclusion et perspectives

- Etude du comportement des matériaux homogénéisés ;
- Cas où les alvéoles sont alimentées par un arbre \implies terme dissipatif :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{K}_{\varepsilon}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \operatorname{div}(\partial_t \mathbf{d}^{\varepsilon})(\mathbf{x}_1) \operatorname{div}(\phi)(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$$

[C. Grandmont, B. Maury, N. Meunier], [B. Maury, C. Vannier] ;

- Influence de la dissipation (comportement en temps long, contrôle...);
- Couplage avec le reste de l'arbre respiratoire.