

CANUM 2006

*Un schéma de correction de pression  
inconditionnellement stable pour les équations  
de Navier-Stokes compressibles*



**Fabrice Babik**

Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

**Laura Gastaldo**

Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

**Raphaèle Herbin**

Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités,  
Université Aix-Marseille I

**Jean-Claude Latché**

Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

# Plan

1. Contexte: un schéma “à tout Mach”
2. Deux résultats volumes finis
3. Un schéma de correction de pression
4. Discrétisation spatiale
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. Conclusion

# Contexte: schéma “à tout Mach”

## ▷ Modèle de dérive pour un écoulement diphasique à phases dispersées

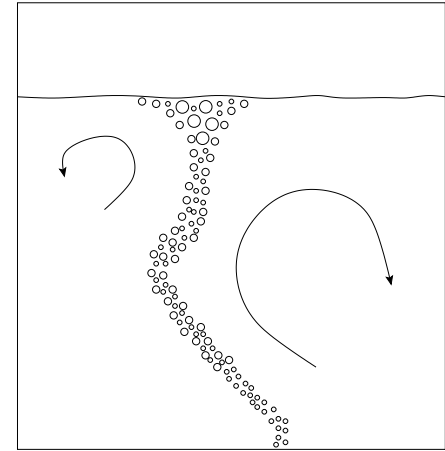
⇒ Modèle homogène à une vitesse et une pression pour le mélange diphasique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho Y}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho (1 - Y) Y \mathbf{u}_r) = \nabla \cdot (D \nabla Y) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = -\nabla \cdot (\rho (1 - Y) Y \mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}_r) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \end{array} \right.$$

- Loi d'état :  $\rho = (1 - \alpha_g) \rho_l + \alpha_g \rho_g(p)$ ,  $\rho Y = \alpha_g \rho_g(p)$
- Si  $\alpha_g \rightarrow 0 \Rightarrow$  zones d'écoulement incompressible
- Si  $\alpha_g \rightarrow 1 \Rightarrow$  zones d'écoulement compressible

⇒ **nécessité d'un schéma “à tout Mach”**

## ▷ $Y = 1$ : équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible et barotrope



# Problème Continu

## ▷ Equations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible et barotrope

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f} \\ \rho = \varrho(p) \end{cases}$$

## ▷ Trois estimations a priori

- Stricte positivité de la densité:  $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$   
si cette propriété est respectée par la condition initiale.
- Conservation de la masse :  $\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .
- Identité d'énergie qui garantit le contrôle de la quantité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 \, d\mathbf{x} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) P(\rho(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

en fonction du second membre et des conditions initiales et aux limites du problème.

# Plan

1. Contexte: schéma à tout Mach
2. Deux résultats volumes finis
3. Un schéma de correction de pression
4. Discrétisation spatiale
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. Conclusion

## ▷ Stabilité de l'opérateur d'advection

### ■ Hypothèses :

- ◆  $(\rho_K)$  et  $(\vec{a}_K)$  liés par le bilan de masse :

$$|K| \frac{\rho_K^{n+1} - \rho_K^n}{\delta t} + \text{div}_{\text{up}}(\rho_K^{n+1} \vec{a}_K) = 0 \quad \text{pour chaque volume de contrôle } K,$$

- ◆  $(\rho_K^n)$  et  $(\rho_K^{n+1})$  strictement positives.

### ■ Inégalité de stabilité :

$$\frac{1}{2\delta t} \sum_K |K| \left[ \rho_K^{n+1} (z_K^{n+1})^2 - \rho_K^n (z_K^n)^2 \right] \leq$$

$$\sum_K z_K^{n+1} \left[ \underbrace{|K| \frac{\rho_K^{n+1} z_K^{n+1} - \rho_K^n z_K^n}{\delta t} + \text{div}_{\text{up}}(\rho_K^{n+1} z_K^{n+1} \vec{a}_K)}_{\text{opérateur d'advection}} \right].$$

### ■ Cas $z = u$ : contrôle de la quantité

$$\frac{1}{2\delta t} \sum_K |K| \left[ \rho_K^{n+1} (u_K^{n+1})^2 - \rho_K^n (u_K^n)^2 \right]$$

⇒ on retrouve l'argument central du théorème de l'énergie cinétique.

## ▷ Contrôle du travail des forces de pression

■ Définition du potentiel élastique :  $P(z) = \int_1^z \frac{\varrho^{-1}(s)}{s^2} ds$ .

■ Hypothèses :

◆  $(\rho_K)$  et  $(\vec{a}_K)$  liés par le bilan de masse :

$$|K| \frac{\rho_K^{n+1} - \rho_K^n}{\delta t} + \underbrace{\text{div}_{\text{up}}(\rho_K^{n+1} \vec{a}_K)} = 0 \quad \text{pour chaque volume de contrôle } K,$$

$$\text{i.e : } \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \rho_\sigma^{n+1} \vec{a}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$$

◆ pression et densité liées par la loi d'état :  $\rho^{n+1} = \varrho(p^{n+1})$ ,

◆  $z \rightarrow z P(z)$  fonction croissante et convexe.

■ Inégalité de stabilité :

$$\sum_K -p_K^{n+1} \underbrace{\text{div}(\vec{a}_K)} \geq \frac{1}{\delta t} \sum_K |K| \left[ \rho_K^{n+1} P(\rho_K^{n+1}) - \rho_K^n P(\rho_K^n) \right].$$

$$\text{i.e : } \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \vec{a}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$$

# Plan

1. Contexte: schéma à tout Mach
2. Deux résultats volumes finis
3. Schéma de correction de pression
4. Discrétisation spatiale
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. Conclusion



# Schéma de correction de pression

Prédiction de la densité aux faces  $\frac{\tilde{\rho}^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}^{n+1} u^n) = 0$

Prédiction de la pression:  $-\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\rho}^{n+1}} \nabla \tilde{p}^{n+1} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}^{n+1}} \sqrt{\tilde{\rho}^n}} \nabla p^n \right)$

Bilan quantité de mouvement :  $\frac{\tilde{\rho}^{n+1} \tilde{u}^{n+1} - \rho^n u^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}^{n+1} u^n \otimes \tilde{u}^{n+1})$   
 $+ \nabla \tilde{p}^{n+1} - \nabla \cdot \tau(\tilde{u}^{n+1}) = f^{n+1}$

Projection :  $\tilde{\rho}^{n+1} \frac{\bar{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - \tilde{p}^{n+1}) = 0$   
 $\frac{\varrho(p^{n+1}) - \rho^n}{\delta t} + \nabla \cdot \varrho(p^{n+1}) \bar{u}^{n+1} = 0$   
 $\rho^{n+1} = \varrho(p^{n+1})$

Renormalisation de la vitesse :  $\sqrt{\rho^{n+1}} u^{n+1} = \sqrt{\tilde{\rho}^{n+1}} \bar{u}^{n+1}$

# Plan

1. Contexte: schéma à tout Mach
2. Deux résultats volumes finis
3. Schéma de correction de pression
4. **Discrétisation spatiale**
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. Conclusion

# Discrétisation spatiale

## ▷ Élément fini de Rannacher-Turek

On considère une partition de  $\Omega$ ,  $\mathcal{T}$ , composée soit de quadrangles soit d'héxaèdres.

### ■ Vitesse :

- ◆ nœuds situés aux centres des faces  $\sigma \in \partial\mathcal{T}$ ,
- ◆ fonctions de forme pour l'élément de référence  $\hat{K}$ , (pour  $d = 2$ ) :

$$Q_1(\hat{K}) := \text{span}\{1, x, y, x^2 - y^2\},$$

- ◆ transformation  $K = T_K(\hat{K})$  : transformation  $Q_1$  standard,
- ◆ degrés de liberté déterminés par les fonctions de forme globales :

$$F_{\sigma,i} := |\sigma|^{-1} \int_{\sigma} v_i d\gamma \quad , \sigma \in \partial\mathcal{T}, i = 1, \dots, d,$$

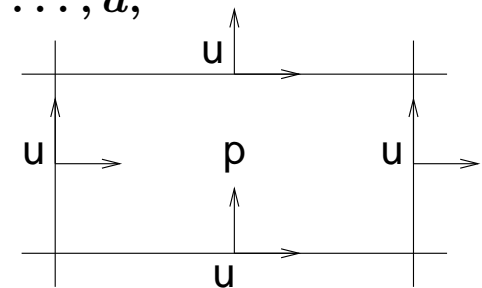
- ◆ continuité de l'intégrale aux faces.

### ■ Pression : constante par maille.

- Le couple des espaces d'approximation pour la vitesse et la pression est inf-sup stable pour les maillages quadrangulaires.

▷ Densité : constante par maille.

▷ Pour un maillage constitué d'éléments triangulaires, on utilisera l'élément de Crouzeix-Raviart.



# Discrétisation des opérateurs d'advection

## ▷ Terme instationnaire

- Observation :  $\int_K \varphi_\sigma dx = \frac{|D_\sigma|}{2}$  ,  $\sigma \in \partial\mathcal{T}$ .
- Technique de lumping :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \frac{\rho_K^{n+1} u^{n+1} - \rho_K^n u^n}{\delta t} v dx \rightarrow \sum_{D_\sigma} |D_\sigma| \frac{\rho_\sigma^{n+1} u_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^n u_\sigma^n}{\delta t}$$

$$\text{avec : } \rho_\sigma^n = \frac{1}{|D_\sigma|} (|D_{\sigma,K}| \rho_K^n + |D_{\sigma,L}| \rho_L^n)$$

⇒ on retrouve une discrétisation volumes finis sur les mailles diamant.

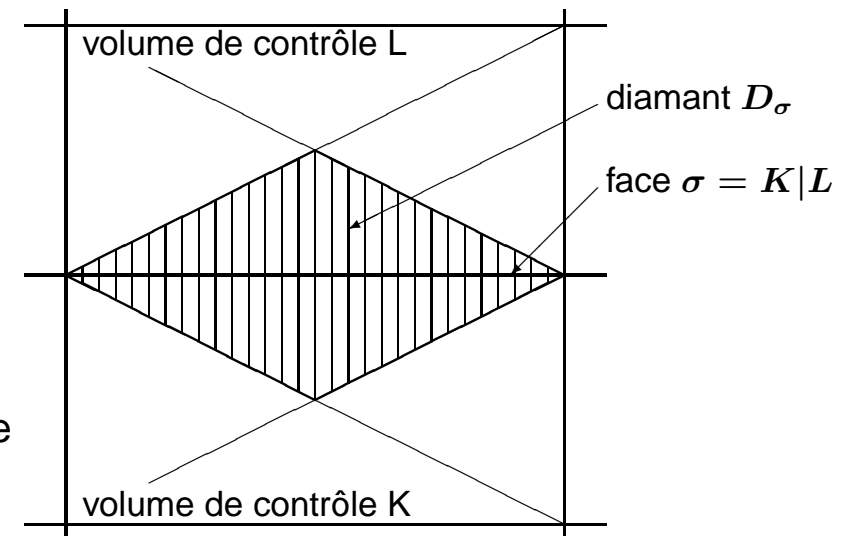
## ▷ Terme de convection : discrétisation volumes finis décentrés sur les mailles diamant.

## ▷ On applique cette discrétisation aux opérateurs d'advection dans :

- le bilan de quantité de mouvement
- l'étape de prédiction de la densité aux faces.

## ▷ On retrouve la structure qui permet d'appliquer le premier résultat volumes finis

⇒ garantit la stabilité de l'opérateur d'advection de vitesse



# Etape de correction de pression

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}^{n+1} \frac{\bar{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - \tilde{p}^{n+1}) = 0 \\ \frac{\varrho(p^{n+1}) - \rho^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varrho(p^{n+1}) \bar{u}^{n+1}) = 0 \\ \rho^{n+1} = \varrho(p^{n+1}) \end{array} \right.$$

## ▷ Discrétisation de la première équation

- Technique de lumping pour le terme instationnaire
- Discrétisation du gradient de pression :  
discrétisation volumes finis de  $\nabla \cdot u$  sur le volume de contrôle  $K$

## ▷ Discrétisation de l'équation de conservation de masse

- Discrétisation volumes finis upwind par rapport à  $\bar{u}^{n+1}$  sur les mailles primales  $K \in \mathcal{T}$   
⇒ garantit la stricte positivité de la densité.

## ▷ On retrouve la structure qui permet d'appliquer le deuxième résultat volumes finis

⇒ permet de borner le travail des forces de pression

## ▷ Existence d'une solution

- Argument de degré topologique pour l'étape de correction de pression :  
⇒ raccord par homotopie à un problème de Darcy régularisé par un terme de compressibilité artificielle.

# Plan

1. Contexte: schéma à tout Mach
2. Deux résultats volumes finis
3. Schéma de correction de pression
4. Discrétisation spatiale
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. Conclusion

# Propriétés du schéma de correction de pression

Prédiction de la densité aux faces  $\frac{\tilde{\rho}^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}^{n+1} u^n) = 0$

Prédiction de la pression:  $-\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\rho}^{n+1}} \nabla \tilde{p}^{n+1} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}^{n+1}} \sqrt{\tilde{\rho}^n}} \nabla p^n \right)$

Bilan quantité de mouvement :  $\frac{\tilde{\rho}^{n+1} \tilde{u}^{n+1} - \rho^n u^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}^{n+1} u^n \otimes \tilde{u}^{n+1}) + \nabla \tilde{p}^{n+1} - \nabla \cdot \tau(\tilde{u}^{n+1}) = f^{n+1}$

Projection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}^{n+1} \frac{\bar{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla(p^{n+1} - \tilde{p}^{n+1}) = 0 \\ \frac{\varrho(p^{n+1}) - \rho^n}{\delta t} + \nabla \cdot \varrho(p^{n+1}) \bar{u}^{n+1} = 0 \\ \rho^{n+1} = \varrho(p^{n+1}) \end{array} \right.$$

Renormalisation de la vitesse :  $\sqrt{\rho^{n+1}} u^{n+1} = \sqrt{\tilde{\rho}^{n+1}} \bar{u}^{n+1}$

## ► Propriétés du schéma

- Existence d'une solution pour chaque étape
- Contrôle de la quantité :

$$\frac{1}{2} \|\rho^{n+1} u^{n+1}\|_h^2 + \int_{\Omega} \rho^{n+1} P(\rho^{n+1}) + \delta t \sum_{k=1}^{n+1} \int_{\Omega, h} \tilde{u}^k : \tau(\tilde{u}^k) dx + \frac{\delta t^2}{2} |p^{n+1}|_{1, \tilde{\rho}^{n+1}}^2$$

# Plan

1. Contexte: schéma à tout Mach
2. Deux résultats volumes finis
3. Schéma de correction de pression
4. Discrétisation spatiale
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. Conclusion



# Solution manufacturée

▷ Domaine :

- $\Omega = [0, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

- $[0, T] = [0, 0.5]$

▷ Solution analytique :

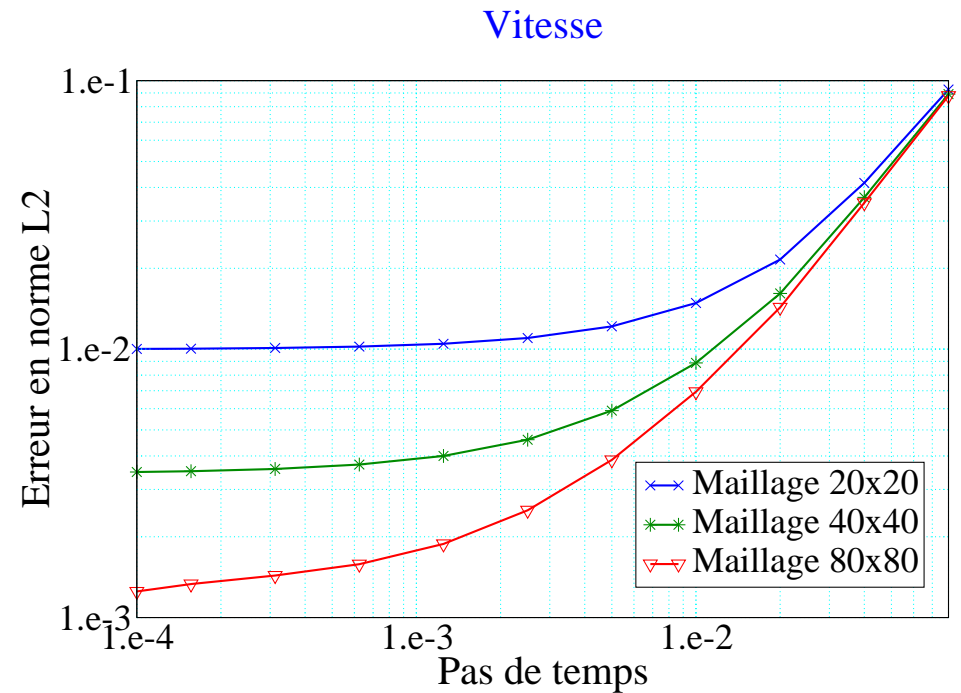
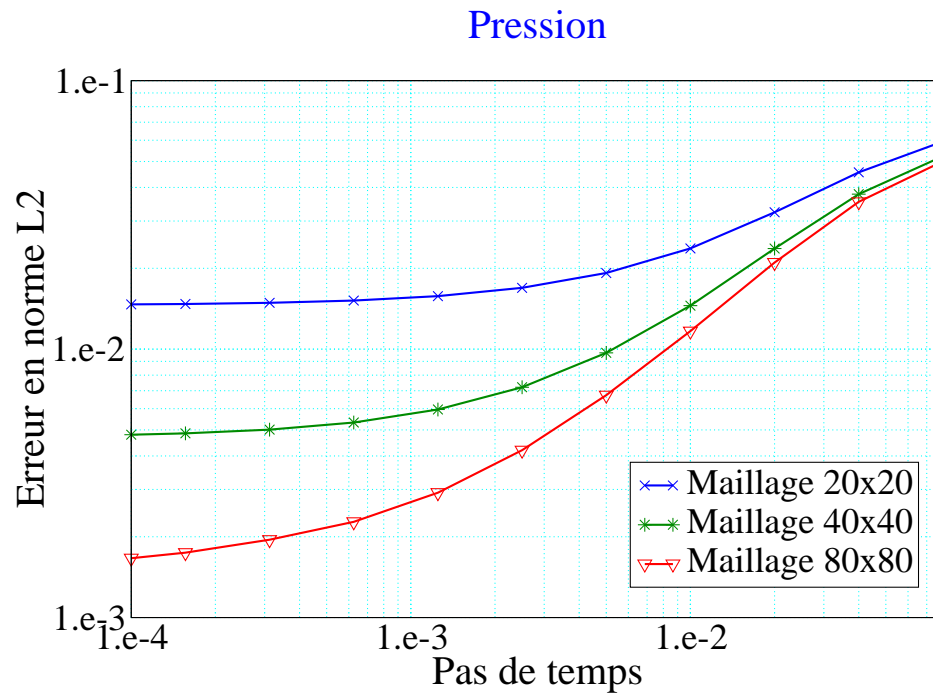
$$\rho \mathbf{u} = -\frac{1}{4} \cos(\pi t) \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \\ \cos(\pi y) \end{bmatrix}$$

$$\rho = 1 + \frac{1}{4} \sin(\pi t) [\cos(\pi x) - \sin(\pi y)]$$

▷ Loi d'état :

$$p = \varrho(\rho)^{-1} = \frac{\rho - 1}{\gamma \text{Ma}^2}, \quad \gamma = 1.4, \text{Ma} = 0.5$$

# Erreurs de convergence



- Convergence en espace :
  - ◆ ordre d'environ 2 pour la vitesse et la pression
- Convergence en temps :
  - ◆ ordre 1 pour la vitesse et la pression

# Plan

1. Contexte: schéma à tout Mach
2. Deux résultats volumes finis
3. Schéma de correction de pression
4. Discrétisation spatiale
5. Propriétés du schéma de correction de pression
6. Résultats numériques
7. [Conclusion](#)

# Conclusion

## ▷ Schéma de correction de pression :

- vérifie les trois estimations “a priori” du problème continu en discret :
  - ◆ la stricte positivité de la densité,
  - ◆ la conservation de la masse,
  - ◆ l'identité d'énergie ;
- se réduit à un schéma de projection standard dans le cas incompressible ;
- bon comportement du schéma sur une solution régulière.

## ▷ Perspectives :

- tester le schéma sur des solutions moins régulières ;
- étendre le schéma au modèle de dérive pour un écoulement diphasique à phases dispersées.