CANUM 2006

On a free boundary shallow water model for tsunami simulation

UMR CNRS 6134 - Systèmes Physiques de l'Environnement

F. Flori, C. Giacomoni et M. Peybernes

Guidel, 29 mai - 2 juin 2006

Motivations

Les causes des tsunamis :

1. Les volcans :
   - Krakatau, Indonésie, 1883 (vague de 40 m, 30 000 †).
   - Japon 1792 (destabilisation du Mont Mayuyama, 15 000 †).
   - Santorin 1470 avant J.C. (effondrement de la caldera).
2. Les Eboulements sous marins :
   - Aéroport de Nice 1979 (effondrement des alluvions du Var, 6 †).
3. Les mouvements de la lithosphère.
   - Papouasie Nouvelle Guinée 1998 (vague de 10 à 15 m, 2 000 †).
   - Asie du Sud Est 2004 (231 000 †)

Notre objectif est de proposer un modèle traduisant la formation de la vague et sa pénétration dans les terres quand elle arrive sur la côte.

Notations

- $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$: lithosphère et océan au repos.

- γ_0 : frontière de la lithosphère et de l'océan au repos.

- d : déplacement de la lithosphère.

- $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$: océan.

- $\gamma_t = \{x = X + D(X,t),\ X \in \gamma_0\}$: frontière de l'océan.

- D : mouvement de la frontière de l'océan.

- $\zeta(x,t)$: variation de la surface.

- $h(x,t) = H + \zeta(x,t) - d(x,t)$: hauteur de la colonne d'eau.

La Lithosphère

On utilise un modèle de plaque mince

$$
(S)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \Delta \dfrac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \Delta^2 d = f_0 - gh & \text{in } Q_0 \\
d = f_1,\ \nabla d.n = f_2 & \text{on } \Sigma_0 \\
d(t=0) = d_0(x), \dfrac{\partial d}{\partial t}(t=0) = d_1(x) & \text{in } \Omega_0
\end{cases}
$$

où f_1 et f_2 sont les forces de subduction.

L'Océan

Les modèles d'eaux peu profondes sont bien adaptés à ce type de phénomène :

$$
(F)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - A\Delta u + g\nabla\zeta + \omega_c \wedge u + C_d|u|u = f_3 & \text{in } Q \\
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}(uh) = 0, & \text{in } Q \\
u(t=0) = u_0(x),\ h(t=0) = h_0(x) \geq 0 & \text{on } \Omega_0
\end{cases}
$$

Les Conditions aux Limites

- **Vitesse à la frontière**

$$U(X,t) = u(X + D(X,t),t) = \frac{\partial D(X,t)}{\partial t}$$

- **Condition sur la contrainte**

$$\sigma(X+D(X,t),t)\cdot n(X+D(X,t),t)|\det J|(X,t) = A\left(\frac{\partial D(X,t)}{\partial t}\right) \text{ sur } \gamma_0 \times (0,T)$$

A est opérateur défini sur γ_0 qui prend en compte la contrainte appliquée au fluide sur sa frontière quand l'eau entre dans les terres. On suppose que A est un opérateur de type Laplace-Beltrami qui assure que

$$\int_{\gamma_0} A(v)v = \int_{\gamma_0} A^{1/2}(v)A^{1/2}(v) = \|v\|^2_{H^3(\gamma_0)}$$

Résultat d'existence

Pour des données petites on a le résultat suivant :

Théorème 1 *Si* $d_0 \in H^2(\Omega_0)$, $d_1 \in H^1(\Omega_0)$, $\rho_0 \geq 0$ *p.p. dans* Ω_0, $h_0 \log h_0 \in L^1(\Omega_0)$, $u_0 \in L^2(\Omega_0)$ *alors le problème admet une solution* (u, h, d, D) *vérifiant :*

- $h \log h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t))$,
- $h \in L^2(Q)$,
- $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega_t))$,
- $d \in W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega_0)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega_0))$,
- $D \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^3(\gamma_0))$, $\quad \det J(X, t) \neq 0$.

Estimations d'Energie

Si les données sont "bien choisies" on arrive sans difficulté à :

$$\|(u,h,d)\| + \|D\|_{W^{1,\infty}(0,T;H_0^3(\gamma_0))} \leq C_0 + \epsilon\|h\|_{L^2(Q)}$$

où C_0 dépend des données et $\epsilon > 0$ est suffisamment petit.

- **Remarque :** Il nous faut trouver une estimation fine sur h dans $L^2(Q)$ en fonction de :

  u dans $L^2(0,T;H^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))$

  et

  $h \log h$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega_t))$.

Obtention d'une borne sur h dans $L^2(Q)$

On utilise l'opérateur linéaire de Stokes $S(\phi) = p$, où p est l'unique solution vérifiant le problème de Stokes :

$$-\Delta u_\phi + \nabla p = \phi \quad \text{et} \quad \mathrm{div} u_\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t,$$

$$u_\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_t, \quad \int_{\Omega_0} p(x(x_0))dx_0 = 0\,.$$

L'opérateur S est continu de $L^2(\Omega_t)$ dans $H^1(\Omega_t)$ et de $H^{-1}(\Omega_t)$ dans $L^2(\Omega_t)$. Soit (v, Π) la solution du problème suivant :

$$-\Delta v_\pi + \nabla \pi = -A\Delta u \quad \text{et} \quad \mathrm{div} v_\pi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t,$$

$$v_\pi = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_t, \quad \int_{\Omega_t} \pi = 0\,.$$

En utilisant cette décomposition, on aboutit aisément à :

$$\pi + h = F(u,h) - S\left(\frac{\partial u}{\partial t} - (u.\nabla)u\right)$$

et ainsi

$$\|h\|^2_{L^2(Q)} \leq C(u,h) - \underbrace{\int_Q S\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) h}_{terme\ 1} - \underbrace{\int_Q S\left((u.\nabla)u\right) h}_{terme\ 2}.$$

On traite le terme 1 avec le lemme suivant

Lemme (Boulakia-Murat) : Soit $\phi \in C^1([0,T], L^2(\Omega_t))$, alors on a la relation

$$S\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial S(\phi)}{\partial t} + \int_{\Omega_0} \nabla S(\phi).v(x(x_0))dx_0 + p',$$

où p' est la solution du problème de Stokes suivant :

$$-\Delta w + \nabla p' = 0 \quad \text{et} \quad \text{div} w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t,$$

$$w = (u.\nabla)u_\phi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_t\,, \quad \int_{\Omega_0} p'(x(x_0))dx_0 = 0\,.$$

Pour traiter le terme 2 nous avons besoin d'une estimation plus fine sur le terme d'advection $(u.\nabla)u$. On utilise pour cela des propriétés des espaces de Hardy sur des bornés.

Soit B_η^x la boule de centre $x \in \Omega$ et de rayon η. Dans la suite, on note $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ dont la dérivée au sens des distributions est encore dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ l'espace de Hardy défini par

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^2) / \sup_{\eta \geq 0} |h_\eta * f| \in L^1(\mathbb{R}^2) \right\}$$

où $h_\eta(x) = \eta^{-2} h(\frac{x}{\eta}) \geq 0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{supp} h_\eta(x) \subset B_\eta^x$, $\int_{\mathbb{R}^2} h_\eta(x)\, dx = 1$.

On introduit des espaces de Hardy définis sur des domaines bornés. Un de ces espaces est :

$$\mathcal{H}_z^1(\Omega) = \left\{ f \in L^1(\Omega) / f_z \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \right\} \subset H^{-1}(\Omega)$$

où f_z est le prolongement par 0 de f dans $\mathbb{R}^2$. Toute fonction f de $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega f\, dx = 0$.

Lemme (Flori-Orenga) On pose $u\nabla u_l = T_0 + T_1 + T_2$ et on montre que :

- $T_0 \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,
- $T_1 \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1_z(\Omega_t)) \subset L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$ en dimension 2,
- $T_2 \in L^1(0,T;\mathcal{W}(\Omega_t)) \subset L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega_t))$ en dimension 2.

De plus :

$$\|T_0\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq k_0 \|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}$$

$$\|T_1\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H}^1_z(\Omega_t))} \leq k_1 \|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \|\mathrm{rot}\, u_i\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\|T_2\|_{L^1(0,T;\mathcal{W}(\Omega_t))} \leq k_2 \|u_i\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}$$

où k_0, k_1 et k_2 sont des constantes strictement positives ne dépendant que des données.

On peut alors traiter le terme 2. On a :

$$\int_Q S\,(u.\nabla u_l)\,h = \int_Q S\,(T_0 + T_1 + T_2)\,h$$

où en utilisant le lemme précédent et la continuité de l'opérateur S de H^{-1} dans L^2 on a (par exemple pour T_1) :

$$\int_Q S(T_1)h \leq C_\epsilon \underbrace{\|u_i\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}\|\mathrm{rot}\, u_i\|^2_{L^2(Q)}}_{terme\ 3} + \epsilon\|h\|^2_{L^2(Q)}.$$

Pour des données petites on peut estimer le terme 3 et ce résultat est suffisant pour obtenir les estimées annoncées.

Continuité des données

On a une paramétrisation $C^1(\mathbb{R}^+ \times \gamma_0)$ de l'interface :

$$\mathbb{R}^+ \times \gamma_0 \to \gamma_t \quad \text{tel que} \quad (t,s) \mapsto D(t,s)$$

Soit Λ l'opérateur :

$$C^1(\gamma_0) \to C^1(\Omega_0) \quad \text{tel que} \quad f \mapsto \Lambda f$$

tel que $\Delta(\Lambda f) = 0$ dans Ω_0 et $\Lambda f = f$ sur γ_0. Ce prologement permet de définir $\tilde{D}$:

$$\mathbb{R}^+ \times \Omega_0 \to \Omega_t \quad \text{tel que} \quad (t,x) \mapsto \tilde{D}(t,x)$$

tel que $\tilde{D}(t,.) = \Lambda D(t,.)$, $\tilde{D}(t,.) = D(t,.)$ sur γ_0, et $\tilde{D}(t,.)$ est un difféomorphisme de Ω_0 dans Ω_t. En particulier on a :

$$\forall t \in [0,T],\ \forall x \in \Omega_0,\ 0 < \alpha_T \leq \det|\nabla_x \tilde{D}_t| \leq \frac{1}{\alpha_T} < +\infty, \tag{1}$$

$$||\nabla_x \tilde{D}_t||_{L^\infty(\Omega_t)} \leq \frac{1}{\alpha_T} < +\infty. \tag{2}$$

Ainsi, si on définit :

$$v \ : \ \mathbb{R}^+ \times \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(t,x) \mapsto v(t,x) = u(t, \tilde{D}(t,x))$$

alors

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial t}(t, \tilde{D}(t,x)) + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t}(t,x) \nabla u_k(t, \tilde{D}(t,x)),$$

$$\nabla_x v_k(t,x) = \nabla_x \tilde{D}(t,x) \nabla u_k(t, \tilde{D}(t,x)).$$

Par conséquent en utilisant les propriétés (1) et (2) :

$$\nabla_x v \in L^2(0,T; L^2(\Omega_0)) \ \text{ et } \ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega_0)).$$

(en effet, $f \in H^{-1}(\Omega_t) \Rightarrow f \circ \tilde{D}_t \in H^{-1}(\Omega_0)$ par dualité + uniformité en temps.) Ainsi, on $v \in C^0([0,T]; L^2(\Omega_0))$ d'où par changement de variable $\circ \tilde{D}_t^{-1}$, on a :

$$u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega_t))$$

Régularisation du problème de shallow water (SW)

On approche (SW) par :

$$
(SW^\delta)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - A\Delta u + \nabla h = 0 & \text{in } \Omega_t,\\[2ex]
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) + \delta h^2 = 0 & \text{in } \Omega_t,
\end{cases}
$$

Cette régularisation est utilisée pour passée à la limite dans les équations discrètes. Dans notre schéma numérique, pour conserver la positivité de h, nous renormalisons l'équation de continuité comme suit :

$$
\frac{\partial \log h}{\partial t} + u\nabla \log h + \operatorname{div} u + \delta h = 0.
$$

Schéma Lagragien

Pour la frontière, nous proposons la discrétisation suivante : pour tout $k \in [1, ..., m]$, avec $\Delta t = T/m$, nous posons

$$D_0(X) = 0$$

et

$$D_k(X) = D_{k-1}(X) + u_{k-1}(X + D_{k-1}(X))\Delta t,$$

$$\Gamma_k(X) = X + D_k(X),$$

De la même façon on considère les courbes caractéristiques définies par $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{dt} = u(x(t), t)$ que l'on discrétise en utilisant la relation

$$x_{k+1} = x_k + u_k(x_k)\Delta t,\ k \in \{0, ..., m-1\},\ \Delta t = \frac{T}{m}.$$

Par récurrence, on construit m domaines approchés :

$$\Omega_k = \{x_k \in \mathbb{R}^2 / x_k = x_{k-1} + u_{k-1}(x_{k-1})\Delta t,\, x_{k-1} \in \Omega_{k-1}\}.$$

Problème discret

On note $\widetilde{x}_k = x_{k-1}$ la position dans Ω_{k-1} d'une particule située en x_k à l'instant $t = k\Delta t$.

Dans l'équation des moments, la dérivée lagrangienne est approchée par :

$$\frac{(u_k - \widetilde{u}_{k-1})}{\Delta t} + \Delta t^\alpha B u_k$$

où $t_k = k\Delta t$, $u_k = u(x_k, t_k)$, $\widetilde{u}_{k-1} = u(\widetilde{x}_k, t_{k-1}) = u(x_k - \widetilde{u}_{k-1}\Delta t, t_{k-1})$, $0 < \alpha < 1$, B un opérateur tel que $D(B) = H^3(\Omega_k)$.

La condition sur la contrainte normale est "perturbée" par l'opérateur B. Ainsi, sa forme discrète s'écrit :

$$\sigma_k(\Gamma_k(X)) \cdot n_k(\Gamma_k(X)) |\det \mathcal{J}_k|(X) + \Delta t^\alpha \mathrm{Tr}(B u_k)(\Gamma_k(X)) =$$

$$= A\left(\frac{u_k(\Gamma_k(X)) - u_{k-1}(\Gamma_{k-1}(X))}{\Delta t}\right) \quad \text{sur} \quad \gamma_0$$

En utilisant ces notations on parvient au problème stationnaire :

$$
(SW_k^\delta)\begin{cases}
u_k - \mu\Delta t\,\Delta u_k + \Delta t\ \nabla h_k + \Delta t^{1+\alpha}\,B u_k = \widetilde{u}_{k-1} & \text{in } \Omega_k,\\[2em]
\log h_k + \Delta t\,\mathrm{div}\,u_k + \delta\Delta t\,h_k = \log\widetilde{h}_{k-1} & \text{in } \Omega_k,\\[2em]
\sigma_k(\Gamma_k(X))\cdot n_k(\Gamma_k(X))|\det\mathcal{J}_k|(X) + \Delta t^\alpha \mathrm{Tr}(B u_k)(\Gamma_k(X)) & \\[2em]
\qquad = A\left(\dfrac{u_k(\Gamma_k(X)) - u_{k-1}(\Gamma_{k-1}(X))}{\Delta t}\right) & \text{on } \gamma_0,
\end{cases}
$$

où $\mathcal{J}_k$ est la matrice jacobienne associée à la transformation $X \mapsto \Gamma_k(X) = X + d_k(X)$, permettant de passer de γ_0 à γ_k. Pour des données petites, on a $\det\mathcal{J}_k \neq 0$ et cette tansformation a un sens.

De la même façon, on note J_k la matrice jacobienne de la transformation $x_{k+1} = x_k + \Delta t\, u_k(x_k)$ permettant de passer de Ω_k à Ω_{k+1}:

$$J_k = \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \dfrac{\partial u_{k1}}{\partial x_{k1}} & \Delta t \dfrac{\partial u_{k1}}{\partial x_{k2}} \\ \Delta t \dfrac{\partial u_{k2}}{\partial x_{k1}} & 1 + \Delta t \dfrac{\partial u_{k2}}{\partial x_{k2}} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur régularisant de discrétisation $\Delta t^\alpha B u_k$ permet de montrer que $\Delta t\, D u_k$ est borné dans $L^\infty(\Omega_k)$ et tend vers 0 comme $\Delta t^{(1-\alpha)/2}$.

Ainsi, si on choisit Δt suffisamment petit, $\det J_k > 0$ et la transformation $x_{k+1} = x_k + \Delta t\, u_k(x_k)$ a un sens.

<u>Lemme</u>(Flori-Orenga-Peybernes) Quand $\Delta t \to 0^+$, le problème (SW_k^δ) converge vers (SW_δ) au sens des distributions (soumis aux Annales de l'IHP-Analyse Non linéaire) .